KTH Matematik
Kontrollskrivning 1A i Matematik II, 5B1136, för
I1 den 30 november 2006, 10:15-11:15.

Problem 1:

Avgör om vektorerna $\bar{\mathbf{u}} = (-1, 2, 3),\ \bar{\mathbf{v}} = (1, 0, -2),\ \bar{\mathbf{w}} = (-1, -4, 0)$ är linjärt oberoende eller ej.

Välj ut två av dessa tre vektorer och bestäm ekvationen (på parameter- eller normalform) för det plan som är parallellt med dina utvalda vektorer och som innehåller punkten (3,9,11).

Lösning:

Vektorerna är linjärt oberoende om och endast om ekvationen $\bar{\mathbf{0}} = \lambda_1\bar{\mathbf{u}} + \lambda_2\bar{\mathbf{v}} + \lambda_3\bar{\mathbf{w}} = (-\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3, 2\lambda_1 - 4\lambda_3, 3\lambda_1 - 2\lambda_2) = (0, 0, 0)$ har bara triviala lösningen $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Det homogena ekvationssystemet

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

har parameterlösning. Till exempel är $2\bar{\mathbf{u}} + 3\bar{\mathbf{v}} + \bar{\mathbf{w}} = \bar{\mathbf{0}}$ och vektorerna är *linjärt beroende.*

Eftersom vektorerna är linjärt beroende är alla tre parallella med samma plan. Vektorprodukten av exempelvis $\bar{\mathbf{v}}$ och $\bar{\mathbf{w}}$ ger oss planets normalvektorn: $\bar{\mathbf{v}}\mathrm{x}\bar{\mathbf{w}} = (0\cdot 0 - (-2)\cdot(-4), (-2)\cdot(-1) - 1\cdot 0, 1\cdot(-4) - 0\cdot(-1)) = (-8, 2, -4) = (A, B, C)$ i $Ax + By + Cz + D = 0$. Punkten (3,9,11) uppfyller planets ekvation, dvs $(-8)\cdot 3 + 2\cdot 9 + (-4)\cdot 11 + D = -50 + D = 0$. Således är planets ekvation på normalform $-8x + 2y + -4z + 50 = -2(4x - y + 2z - 25) = 0$.

Problem 2:

En linjär avbildning definieras som en avbildning $A : R^n \to R^m$ som för alla vektorer $\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}} \in R^n$ och alla skalärer $a, b \in R$ uppfyller villkoret
(1) $A(a\bar{\mathbf{x}} + b\bar{\mathbf{y}}) = aA(\bar{\mathbf{x}}) + bA(\bar{\mathbf{y}})$.

I boken definieras den att uppfylla två krav för alla vektorer $\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}} \in R^n$ och alla skalärer $k \in R$:
(i) $A(\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{y}}) = A(\bar{\mathbf{x}}) + A(\bar{\mathbf{y}})$
(ii) $A(k\bar{\mathbf{x}}) = kA(\bar{\mathbf{x}})$.

Visa att villkoret (1) leder till villkoren (i) och (ii), dvs att om (1) är uppfyllt, så uppfylles även (i) och (ii).

Lösning:

(1) $\Rightarrow (i):\ A(\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{y}}) \overset{Mult.\ med\ 1}{=} A(1\cdot\bar{\mathbf{x}} + 1\cdot\bar{\mathbf{y}}) \overset{(1)}{=} 1\cdot A(\bar{\mathbf{x}}) + 1\cdot A(\bar{\mathbf{y}}) \overset{Mult.\ med\ 1}{=} A(\bar{\mathbf{x}}) + A(\bar{\mathbf{y}})$;

(1) $\Rightarrow (ii):\ A(k\bar{\mathbf{x}}) \overset{Add.\ med\ \bar{\mathbf{0}}}{=} A(k\cdot\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{0}})) \overset{Mult.\ med\ 0}{=} A(k\bar{\mathbf{x}} + 0\cdot\bar{\mathbf{y}}) \overset{(1)}{=} k\cdot A(\bar{\mathbf{x}}) + 0\cdot A(\bar{\mathbf{y}}) \overset{Mult.\ med\ 0}{=} k\cdot A(\bar{\mathbf{x}}) + \bar{\mathbf{0}} \overset{Add.\ med\ \bar{\mathbf{0}}}{=} kA(\bar{\mathbf{x}})$. Q.E.D.