

KTH Matematik
Kontrollskrivning 1B i Matematik II, 5B1136, för
II den 30 november 2006, 10:15-11:15.

Problem 1:

Avgör om vektorerna $\bar{\mathbf{u}} = (2, 1, 0)$, $\bar{\mathbf{v}} = (6, -3, 4)$, $\bar{\mathbf{w}} = (0, -3, 2)$ är linjärt oberoende eller ej.

Välj ut två av dessa tre vektorer och bestäm ekvationen (på parameter- eller normalform) för det plan som är parallellt med dina utvalda vektorer och som innehåller punkten $(3, 9, 11)$.

Lösning: $\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{w}}$ är linjärt oberoende och endast om de spänner upp en parallelepiped i $\mathbb{R}^3$ och trippelprodukten $|\bar{\mathbf{u}} \cdot (\bar{\mathbf{v}} \times \bar{\mathbf{w}})|$. Vi har $|\bar{\mathbf{u}} \cdot (\bar{\mathbf{v}} \times \bar{\mathbf{w}})| =$

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 1 & -3 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-3) \cdot 2 + 6 \cdot (-3) \cdot 0 + 0 \cdot 1 \cdot 4 - 2 \cdot (-3) \cdot 4 - 6 \cdot 1 \cdot 2 - 0 \cdot (-3) \cdot 0 = 0.$$

Eftersom volymen är noll, måste vektorerna vara parallella med ett och samma plan och är därmed *linjärt beroende*.

Planet Π består av punkten $(3, 9, 11)$ samt alla punkter man får om man lägger till linjära kombinationer av $\bar{\mathbf{u}}$ och $\bar{\mathbf{w}}$ (eller $\bar{\mathbf{u}}$ och $\bar{\mathbf{v}}$ eller $\bar{\mathbf{v}}$ och $\bar{\mathbf{w}}$), och planets ekvation på parameterform är $\Pi := (3, 9, 11) + s(2, 1, 0) + t(0, -3, 2) = (3 + 2s, 9 + s - 3t, 11 + 2t)$.

Problem 2:

En linjär avbildning definieras som en avbildning $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ som för alla vektorer $\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^n$ och alla skalärer $a, b \in \mathbb{R}$ uppfyller villkoret

$$(1) \quad A(a\bar{\mathbf{x}} + b\bar{\mathbf{y}}) = aA(\bar{\mathbf{x}}) + bA(\bar{\mathbf{y}}).$$

I boken definieras den att uppfylla två krav för alla vektorer $\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^n$ och alla skalärer $k \in \mathbb{R}$:

$$(i) \quad A(\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{y}}) = A(\bar{\mathbf{x}}) + A(\bar{\mathbf{y}})$$

$$(ii) \quad A(k\bar{\mathbf{x}}) = kA(\bar{\mathbf{x}}).$$

Visa att villkoren (i) och (ii) leder till villkoret (1), dvs att om (i) tillsammans med (ii) är uppfyllda, så uppfylles även (1).

Lösning:

$$A(a\bar{\mathbf{x}} + b\bar{\mathbf{y}}) \stackrel{(i) \text{ med vektorerna } (a\bar{\mathbf{x}}) \text{ och } (b\bar{\mathbf{y}})}{=} A(a\bar{\mathbf{x}}) + A(b\bar{\mathbf{y}}) \stackrel{(ii) \text{ med } a=k \text{ resp. } b=k}{=} aA(\bar{\mathbf{x}}) + bA(\bar{\mathbf{y}}).$$