KTH Matematik
Kontrollskrivning 2 i Matematik II, 5B1136, för I1
den 25 januari 2007, 13:15-14:15.

Problem 1A:

Låt $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vara definierad som $f(x, y) = xy + \ln(xy^3)$.
a) Bestäm och rita största möjliga definitionsmängden till f.
b) Bestäm tangentplanet till funktionsytan $z = f(x, y)$ för $(x, y) = (8, \frac{1}{2})$, dvs i punkten $(8, \frac{1}{2}, f(8, \frac{1}{2}))$.

a) Argumentet innanför ln måste vara positivt, dvs $xy^3 > 0$, vilket det är för $\{x > 0, y > 0\}$ eller $\{x < 0, y < 0\}$. $\mathcal{D}_f$ är den öppna mängd som består av första och tredje kvadranterna i xy-planet med axlarna borträknade.

b) Funktionen är differentierbar i punkten och tangentplanet definieras av formeln $z = f(a, b) + f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b)$. Vi har $f(8, \frac{1}{2}) = 4$, $f'_x(8, \frac{1}{2}) = y + \frac{1}{x}|_{(8,\frac{1}{2})} = \frac{5}{8}$ och $f'_y(8, \frac{1}{2}) = x + \frac{3}{y}|_{(8,\frac{1}{2})} = 14$. Tangentplanet passerar punkten $(8, \frac{1}{2}, 4)$ och tangentplanets ekvation blir $\frac{5}{8}x + 14y - z - 8 = 0$ eller $5x + 112y - 8z = 64$.

Problem 1B:

Låt $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vara definierad som $f(x, y) = x - y - 2\sqrt{x - y}$.
a) Bestäm och rita största möjliga definitionsmängden till f.
b) Bestäm tangentplanet till funktionsytan $z = f(x, y)$ då $(x, y) = (10, 1)$, dvs i punkten $(10, 1, f(10, 1))$.

a) Argumentet innanför roten måste vara icke-negativt, dvs $x - y \geq 0$; $\mathcal{D}_f$ är den slutna mängd, som består av punkterna på och nedanför den räta linjen $y = x$.

b) Vi har $f(10, 1) = 9 - \sqrt{9} = 3$. Tangentplanets normalvektor är gradienten till funktionen $g(x, y, z) = f(x, y) - z$ i punkten $(10, 1, 3)$, som är grad $f = (f'_x, f'_y, -1)_{(10,1,3)} = (1 - \frac{1}{\sqrt{x-y}}, -1 + \frac{1}{\sqrt{x-y}}, -1)_{(10,1,3)} = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -1)$. Tangentplanet $\frac{2}{2}x - \frac{2}{3}y - z + D = 0$ innehåller punkten $(x, y, z) = (10, 1, 3)$, vilket ger värdet på D och svaret blir $\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y - z - 3 = 0$ eller $2x - 2y - 3z = 9$.

Problem 2:

Låt $f(x, y)$ vara $\mathcal{C}^3$, dvs alla dess partiella derivator av ordning 3 är kontinuerliga, och låt (a, b) vara en inre punkt till funktionens definitionsmängd. Då lyder Taylors formel: $f(a + h, b + k) = f(a, b) + f'_x(a, b) \cdot h + f'_y(a, b) \cdot k + \frac{1}{2!}\big(f''_{xx}(a, b) \cdot h^2 + 2f''_{xy}(a, b) \cdot hk + f''_{yy}(a, b) \cdot k^2\big) + \mathit{restterm}$.
Vad blir Taylors formel av tredje ordningen i två variabler?

$f(a+h, b+k) = f(a, b) + f'_x(a, b) \cdot h + f'_y(a, b) \cdot k + \frac{1}{2!}\big(f''_{xx}(a, b) \cdot h^2 + 2f''_{xy}(a, b) \cdot hk + f''_{yy}(a, b) \cdot k^2\big) + \frac{1}{3!}\big(f'''_{xxx}(a, b) \cdot h^3 + 3f'''_{xxy}(a, b) \cdot h^2k + 3f'''_{xyy}(a, b) \cdot hk^2 + f'''_{yyy}(a, b) \cdot k^3\big) + \mathit{restterm}$.