

Dagens 23/1

15. Bestäm Taylorpolynomet av andra graden till följande funktioner:

a.  $f(x,y) = 2 \ln(x - 2y) + e^{2x-6y}$  kring punkten  $(3,1)$ .

b.  $f(x,y) = e^{x-1} \cos(x - y)$  kring punkten  $(1,1)$ .

16. Bestäm Taylorpolynomet av andra graden till funktionen  $f(x,y) = 8\sqrt{x} + 2\cos(2x - y)$  kring punkten  $(1,2)$ . Använd detta polynom för att beräkna ett approximativt värde av  $f(1,1; 2,2)$ .

1. Bestäm eventuella stationära punkter och deras karaktär till följande funktioner:

a.  $f(x,y) = 2xy^2 + x^2 + 4y$

c.  $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$

d.  $f(x,y) = 3x^3 - 9x + 3y - y^3$

e.  $f(x,y) = x^2 + 2xy - y^3$

2. Är det sant att  $2x^2 + 3y^2 + 4(\sin x)(\sin y) \geq 0$  om  $(x,y)$  ligger tillräckligt nära origo?

3. Verifiera att funktionen  $f(x,y) = (1 + y)^3x^2 + y^2$  endast har en kritisk punkt och att  $f$  antar ett lokalt minimivärde i denna. Är värdet funktionens minsta värde?

Svar:

15. a.  $-1 + 4x - 10y + (x - 3)^2 - 8(x - 3)(y - 1) + 14(y - 1)^2$

15. b.  $x + (x - 1)(y - 1) - (y - 1)^2/2$ .

16.  $f(1+h,2+k) \approx 10 + 4h - 5h^2 + 4hk - k^2$ , där  $h = x - 1$  och  $k = y - 2$ ;  $f(1,1; 2,2) \approx 10,39$ .

1. a. Sadelpunkt i  $(-1,1)$ ; motsvarande kvadratisk form är  $2h^2+8hk-4k^2$ .

1. c. Lokalt minimum i  $(1,1)$  ( $6h^2-6hk+6k^2$ ) och sadelpunkt i  $(0,0)$  ( $-6hk$ ).

1. d. Lokalt minimum i  $(1,-1)$  ( $18h^2+9k^2$ ), lokalt maximum i  $(-1,1)$  ( $-18h^2-9k^2$ ) och sadelpunkter i  $(1,1)$  ( $18h^2-9k^2$ ) och  $(-1,-1)$  ( $-18h^2+9k^2$ ).

1. e. Lokalt minimum i  $(2/3,-2/3)$  ( $2h^2+4hk+4k^2$ ) och sadelpunkt i  $(0,0)$  ( $2h^2+4hk$ ).

2. Ja: gradienten är nollvektorn i punkten och efter uträkning av andraderivatorna i punkten får man  $4h^2+8hk+6k^2$ .

3.  $\text{grad } f = (2x(1+y)^3, 3(1+y)^2x^2+2y)$ . Första koordinaten är lika med noll om  $x = 0$  eller  $y = -1$ .  $x = 0$  ger  $y = 0$  ur andra ekvationen för koordinaten. Om  $x = -1$ , blir andra koordinaten skild från noll, och vi kan inte få en stationär punkt. Alltså är enda stationära punkten  $(0,0)$  som är lokalt minimum, ty motsvarande form är  $2h^2+2k^2$ . Detta är dock inte funktionens globala minimum, då exempelvis  $f(3,-2) = -12 < 0 = f(0,0)$ .