

- Undersök vilka av följande matriser beskriver en transformation mellan två baser:
 - $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
 - $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
 - $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
- Bestäm transformationsmatrisen för övergången från
 - basen $\mathbf{e} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ till basen $\mathbf{f} = \{2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2, 4\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2\}$ (den nya basen $\mathbf{f}$ består alltså av vektorerna $\mathbf{f}_1$ och $\mathbf{f}_2$ med koordinaterna (2,3) respektive (4,5) i den gamla basen $\mathbf{e}$).
 - basen $\{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2\}$ till basen $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$.
 - basen $\{\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2, 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\}$ till basen $\{\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2, 3\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2\}$.
- Vektorn $\mathbf{v}$ har i basen $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ koordinaterna (2,1). Vilka är koordinaterna för $\mathbf{v}$ i basen $\{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2\}$?
- Vektorn $\mathbf{v}$ har i basen $\{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2\}$ koordinaterna (3,4). Vilka är koordinaterna för $\mathbf{v}$ i basen $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$?
- I xy -planet införs nya uv -koordinater genom att man tar vektorerna $\mathbf{f}_1 = (1,3)$ och $\mathbf{f}_2 = (2,1)$ som nya basvektorer. Vilken är ekvationen i det nya koordinatsystemet för den räta linje som i det ursprungliga systemet har ekvationen $2x + y = 5$?
- I $\mathbf{R}^2$ med basvektorer $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ väljs vektorerna med koordinaterna (4,3) respektive (3,2) som nya basvektorer $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$.
 - Vilka är koordinaterna i det nya systemet för den $\mathbf{v}$ vektor som i det gamla systemet har koordinaterna (2,1)?
 - Vilka är koordinaterna i det gamla systemet för den $\mathbf{v}$ vektor som i det nya systemet har koordinaterna (1,-1)?
 - Vilken är ekvationen i det nya systemet för den räta linje som i det gamla systemet har ekvationen $x - y = 2$?

Svar:

- Endast matrisen i c.
- $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$
 - $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
 - $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
- (3,-1)
 - (7,11).
- $u + v = 1$.
- $3x - y = 1$.
- (-1,2)
 - (1,1)
 - $u + v = 2$

7. Undersök vilka av följande matriser beskriver en ON-transformation mellan två baser:

a. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ c. $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ d. $\frac{1}{15} \begin{pmatrix} 5 & 10 & 10 \\ 2 & -11 & 10 \\ 14 & -2 & -5 \end{pmatrix}$

8. En linjär avbildning har i basen $\mathbf{e}$ matrisen $\mathbf{A_e}$ och i basen $\mathbf{f}$ matrisen $\mathbf{A_f}$. Bestäm

a. $\mathbf{A_f}$ om $\mathbf{A_e} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{f} = \{\mathbf{e_1} + 3\mathbf{e_2}, 2\mathbf{e_1} + 4\mathbf{e_2}\}$.

b. $\mathbf{A_e}$ om $\mathbf{A_f} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{f} = \{\mathbf{e_1} + 3\mathbf{e_2}, 2\mathbf{e_1} + 4\mathbf{e_2}\}$.

c. $\mathbf{A_e}$ om $\mathbf{A_f} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{e} = \{\mathbf{f_1} + 3\mathbf{f_2}, 2\mathbf{f_1} + 4\mathbf{f_2}\}$.

d. $\mathbf{A_f}$ om $\mathbf{A_e} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{e} = \{\mathbf{f_1} + 3\mathbf{f_2}, 2\mathbf{f_1} + 4\mathbf{f_2}\}$.

9. Bestäm egenvärden och egenvektorer till följande matriser:

a. $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

10. Bestäm egenvärden och egenvektorer till följande matriser:

a. $\begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 \\ -4 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

11. $\mathbf{A}$ är matrisen i uppgiften 9. Undersök $\mathbf{A}$ är diagonaliserbar. Om så är fallet bestäm en matris $\mathbf{C}$ som diagonaliserar matrisen $\mathbf{A}$ och ange $\mathbf{C^{-1}AC}$.

Svar:

7. Endast matriser i c och d.

8. a. $\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$ b. $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ -1 & 15 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$ d. $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ -1 & 15 \end{pmatrix}$

9. a. $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3, \mathbf{v_1} = (0,1), \mathbf{v_2} = (1,2)$.

b. $\lambda_1 = \lambda_2 = 4, \mathbf{v} = (3,2)$.

c. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \mathbf{v_1} = (1,0), \mathbf{v_2} = (0,1)$.

10. a. $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2, \mathbf{v_1} = (1,-1,1), \mathbf{v_2} = (1,0,2), \mathbf{v_3} = (1,-1,0)$.

b. $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0, \mathbf{v_1} = (-1,1,0), \mathbf{v_2} = (1,0,1), \mathbf{v_3} = (1,1,1)$.

d. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 1, \mathbf{v_1} = (-2,-3,1), \mathbf{v_3} = (1,1,0)$.

11. b men inte a.

12. Undersök om man kan bilda en bas i $\mathbf{R}^2$ bestående av egenvektorer till matrisen $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Om så är fallet ange en sådan bas.
13. Vilka av följande matriser är ON-diagonaliserbara?
- a. $\begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 \\ -4 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
14. Visa att matrisen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ är diagonaliserbar och bestäm $\mathbf{A}^{10}$.
15. Undersök om $\mathbf{A}$ är diagonaliserbar. Om så är fallet bestäm matris $\mathbf{C}$ som diagonaliserar matrisen $\mathbf{A}$ och ange $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$.
- a. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ b. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ c. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Svar:

12. Det kan man inte.
13. b men inte a.
14. $\mathbf{A}^{10} = \begin{pmatrix} 512 & 512 & -512 \\ 511 & 513 & -512 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
15. a. T.ex $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- b. Ej diagonaliserbar.
- c. T.ex $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

16. Skriv på huvudaxelform och bestäm vilken typ av kurva i $\mathbf{R}^2$ som ges av ekvationen
- $6x^2 - 4xy + 9y^2 = 5.$
 - $4xy + 3y^2 = 1.$
 - $2y^2 + 4xy - x^2 = 1.$
17. Skriv på huvudaxelform och bestäm vilken typ av kurva i $\mathbf{R}^2$ som ges av ekvationen
- $x^2 + 4xy + y^2 - 4x - 8y = 1.$
 - $x^2 - xy + y^2 - 4x + 2y = 1.$
 - $x^2 - 2xy + y^2 + 12\sqrt{2}x = 8.$
18. Beräkna arean innanför ellipsen $2x^2 + 4xy + 5y^2 = 1$. Det anses känt att arean innanför ellipsen $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ är lika med πab .
19. Vilken är den geometriska innebörden av följande ekvationer i $\mathbf{R}^3$?
- $5x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = 1.$
 - $2x^2 + y^2 - 4xy - 4yz = 1.$
 - $x^2 - 2y^2 - z^2 - 4xy + 2xz = 1.$

Svar:

16. a. $2x^2 + y^2 = 1$, ellips.
b. $4x^2 - y^2 = 1$, hyperbel.
c. $3x^2 - 2y^2 = 1$, hyperbel.
17. a. $3u^2 - v^2 = 1$, hyperbel.
b. $u^2 + 3v^2 = 10$, ellips.
c. $v = u^2/6$, parabel.
18. $\pi/\sqrt{6}.$
19. a. Ellipsoid.
b. Enmantlad hyperboloid.
c. Tvåmantlad hyperboloid.