

Lektionsuppgifter torsdagen den 8/2

6. Låt $\mathbf{r}(t) = (t \ln(t), \sin(2t)\cot(t))$. Beräkna $\lim_{t \rightarrow 0^+} \mathbf{r}(t)$ och $\mathbf{r}'(t)$.
7. En partikel rör sig längs kurvan $\mathbf{r}(t) = (2t + t^2, t - t^2, 8t)$. Bestäm partikelns hastighet, fart och acceleration vid tiden $t = 1$.
8. Bestäm funktionalmatrisen (Jacobimatrisen) $\mathbf{J}_f$ samt delmatriserna $\partial f / \partial x$ och $\partial f / \partial (y, z)$ då $f(x, y, z) = (xyz, x^2 + y^2 + z^2, x + 2y + 3z)$.
9. Bestäm Jacobimatrisererna till följande funktioner:
 a. $f(x, y) = (xy, x^2y^3, x+2y)$ b. $f(x, y, z) = (xy+z^2, x^2y^3z^4)$.
10. Beräkna $\mathbf{J}_{g \circ f}$, $\partial f / \partial u$ och $\partial f / \partial (u, v)$ i origo, då
- $$\begin{array}{ll} x = 2u - 3v & r = xy \\ y = 3u + 2v & \text{och } g: s = yz \\ z = 4uv + 1 & t = xz \end{array}$$
12. Visa att det i en omgivning av punkten $(1, 1, 1)$ finns precis en funktion $z = z(x, y)$ som uppfyller ekvationen $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + x^2z - yz - z = 2$ och sådan att $z(1, 1) = 1$. Bestäm för denna fkn:
 a. $z'_x(1, 1)$ och $z'_y(1, 1)$
 b. $\text{grad } z(1, 1)$
 c. riktningensderivatan i punkten $(1, 1)$ med riktning i $\mathbf{v} = (2, -6)$.
13. Visa att funktionen $f(x, y) = (u, v) = (2x + \sin y, \sin x + y + 1)$ är lokalt inverterbar. Beräkna de partiella derivatorna $\partial x / \partial u$ och $\partial y / \partial v$ samt inversens Jacobimatrix i punkten $(u, v) = (0, 1)$.
14. Visa att ekvationssystemet
$$\begin{cases} F(x, y) = xy^2 + yz^2 + zx^2 = 4 \\ G(x, y) = x^3 + y^3 + z^3 = 9 \end{cases}$$
 definierar i en omgivning av $(0, 1, 2)$ precis två kontinuerligt deriverbara funktioner $y = y(x)$ och $z = z(x)$ sådana att $y(0) = 1$ och $z(0) = 2$.
17. Visa att ekvationen $z^3 - 2xz + y = 0$ definierar i en omgivning av $(1, 1, 1)$ precis en funktion $z = z(x, y)$ sådan att $z(1, 1) = 1$. Bestäm Taylorpolynomet av 1:a graden till z kring punkten $(1, 1)$.
18. Visa att det i en omgivning av punkten $(7, 7)$ finns precis två kontinuerligt deriverbara funktioner $z = z(x, y)$ och $w = w(x, y)$ sådana att $z(7, 7) = 1$, $w(7, 7) = 2$ och
$$\begin{cases} z^2 + 3w = x \\ 3z + w^2 = y. \end{cases}$$
 Bestäm Taylorpolynomet av första graden till funktionen z kring punkten $(7, 7)$. Bestäm ekvationen till tangentplanet till funktionsgraf för z i punkten $(7, 7, 1)$.

Svar:

6. $(0, 2)$ och $(1 + \ln t, -2 \sin 2t)$.
 7. Hastighet $\mathbf{v} = (4, -1, 8)$, fart $v = 9$, acceleration $\mathbf{a} = (2, -2, 0)$.
 8.

$$\mathbf{J}_f = \begin{pmatrix} yz & xz & xy \\ 2x & 2y & 2z \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{df}/\mathbf{dx} = \begin{pmatrix} yz \\ 2x \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{df}/\mathbf{d}(y, z) = \begin{pmatrix} xz & xy \\ 2y & 2z \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$9. \quad \begin{pmatrix} y & x \\ 2xy^3 & 3x^2y^2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad b. \quad \begin{pmatrix} y & x & 2z \\ 2xy^3z^4 & 3x^2y^2z^4 & 4x^2y^3z^3 \end{pmatrix}$$

$$10. \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{J}_{\mathbf{g} \circ \mathbf{f}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{df}/\mathbf{du} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{df}/\mathbf{d}(u,v) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

12. Punkten (1,1,1) tillhör ekvationskurvan. Implicita funktionssatsen för 3 variabler (Exempel 18 tillsammans med texten före det i avsnitt 3.4) ger att eftersom $F'_z(1,1,1) = 2 \neq 0$ finns en funktion $z(x,y)$ som uppfyller villkoren.

a. I punkten har vi $F'_x=5$, $F'_y=2$ och $F'_z=2$. Alltså är $z'_x=-F'_x/F'_z = -5/2$ och $z'_y=-F'_y/F'_z = -1$.

Alternativt. För att lösa ut x för $z'_x(1,1)$, partialderiverar vi F med avseende på x : $F'_x(x,y,z(x,y)) = (3x^2 + 2xz)dx/dx + (3z^2 + x^2 - 1)dz/dx$. Denna partialderivata är lika med noll, eftersom funktionens värde är lika med 2 och är konstant. Alltså får vi i punkten (1,1,1): $0 = 5 \cdot 1 + 2 \cdot z'_x$ och resten följer.

b. $\text{grad } z(1,1) = (z'_x, z'_y)_{(1,1)} = (-5/2, -1)$ med värdena från a.

$$c. z'_v(1,1) = (-5/2, -1) \cdot (2, -6) / \sqrt{(2^2 + (-6)^2)} = 1/\sqrt{40} = \sqrt{10}/20.$$

13. Inversa funktionssatsen ger resultatet eftersom funktionaldeterminanten (Jacobianen)

$\det(\partial \mathbf{f} / \partial (x,y)) \neq 0$. Låt $\mathbf{g}$ vara inversen till $\mathbf{f}$, då är $\partial \mathbf{g} / \partial (u,v) = (\partial \mathbf{f} / \partial (x,y))^{-1}$. Punkten $(u,v) = (0,1)$

motsvaras av punkten $(x,y) = (0,0)$, vilket ger de exakta värdena i $\partial \mathbf{f} / \partial (x,y)_{(0,0)}$ vars invers ger värdena $\partial x / \partial u = 1$ och $\partial y / \partial v = 2$.

14.

17. Precis samma problemställning som i Problem 12. Genom att låta $F(x,y,z) = z^3 - 2xz + y$ får man $z'_x=-F'_x/F'_z = 2$ och $z'_y = -1$ och därmed blir Taylorpolynomet $z(1,1) = 1 + 2(x-1) - (y-1)$.

18. Taylorpolynomet: $1 - 4x + 3y$. Tangentplanet: $z = 1 - 4x + 3y$.