

Lektionsuppgifter torsdagen den 8/2 (komplettering och ändring)

14. En variant av implicita funktionssatsen (läs texten mellan Exempel 20 och Exempel 21 i avsnitt 3.4) säger att ekvationerna beskriver y och z som funktioner av x kring den givna punkten om den sammanlagda derivatan med avseende på y och z är skild från noll. Med andra ord, Jacobianen

$$\det (\partial(F,G)/\partial(y,z))_{(0,1,2)} = \det \begin{pmatrix} 2xy + z^2 & 2yz + x^2 \\ 3y^2 & 3z^2 \end{pmatrix}_{(0,1,2)} = 4 \cdot 12 - 4 \cdot 3 \neq 0, \text{ vilket skulle visas.}$$

18. Detta är samma problemställning som i Problem 11. En funktion $\mathbf{f}(z,w) = (z^2 + 3w, 3z + w^2) = (x,y)$ är bijektiv kring $(z,w) = (1,2)$ och har därmed en invers $\mathbf{g}(x,y) = (z(x,y), w(x,y))$ kring den punkten, OM $\det (\partial \mathbf{f} / \partial (z,w))_{(1,2)} \neq 0$, vilket den är. Vidare ska man bestämma Taylorpolynomet till $z(x,y)$ och behöver bestämma $\partial z / \partial x$ och $\partial z / \partial y$. Dessa fås från att $\partial \mathbf{g} / \partial (x,y) = (\partial \mathbf{f} / \partial (z,w))^{-1}$:

$$\begin{pmatrix} 2z & 3 \\ 3 & 2w \end{pmatrix}_{(1,2)}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial z / \partial x & \partial z / \partial y \\ \partial w / \partial x & \partial w / \partial y \end{pmatrix}_{(7,7)}$$

Således blir Taylorpolynomet till $z(x,y)$ kring punkten $(x,y) = (7,7)$: $z \approx 1 - 4(x - 7) + 3(y - 7) = 8 - 4x + 3y$.