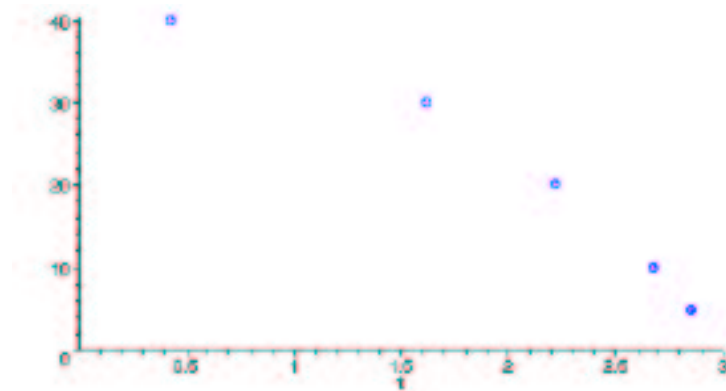


8.5 Minstakvadratmetoden

8.5.1 Ett exempel

Man ville bestämma ett approximativt värde på tyngdaccelerationen g : En sten slängdes från en hög byggnad och man noterade med hjälp av fotoceller placerade på höjderna 5, 10, 20, 30 och 40 meter över marken när stenen passerade dessa nivåer. Mätresultaten blev:

y , nivå i meter	40	30	20	10	5
t , tid i sek	0.42	1.62	2.22	2.67	2.85



Man bedömde att luftmotståndet inte hade någon nämnvärd inverkan på stenens rörelse varför man enligt Newtons lagar har sambandet,

$$y = y_0 + v_0 t - gt^2/2,$$

mellan stenens höjd över marken y [m] och falltiden t [s]. Konstanten y_0 är då stenen starthöjd, v_0 [m/s] dess initiala hastighet i lodled och g [m/s²] den sökta tyngdaccelerationen. Dessa tre okända storheter borde då enligt mätresultaten, om dessa varit matematiskt exakta, uppfylla sambanden:

$$\begin{cases} y_0 + 0.42v_0 - (0.42^2/2)g = 40, \\ y_0 + 1.62v_0 - (1.62^2/2)g = 30, \\ y_0 + 2.22v_0 - (2.22^2/2)g = 20, \\ y_0 + 2.67v_0 - (2.67^2/2)g = 10, \\ y_0 + 2.85v_0 - (2.85^2/2)g = 5. \end{cases} \quad (8.8)$$

Nu är mätvärdena förstås inte exakta vilket gör det osannolikt att systemet, som ju har flera ekvationer än obekanta, har några lösningar. En kalkyl som inte redovisas här visar också att exempelvis de värden på y_0 , v_0 och g som satisfierar de första tre sambanden inte satisfierar de två sista. Rimligt är då att man istället letar efter värden på y_0 , v_0 och g som insatta i ekvationerna ger vänsterleden värden som "så litet som möjligt" avviker från motsvarande högerled.

Vad som menas med "så litet som möjligt" måste då förstås först preciseras. Flera tänkbara alternativ finns, till exempel att man bestämmer y_0 , v_0 och g så att

- den största av skillnaderna mellan höger och vänster led är (till beloppet) så liten som möjligt, eller
- summan av dessa skillnaders belopp är så liten som möjligt, eller
- summan av skillnadernas kvadrater är så liten som möjligt.

Man har i alla dessa fall att lösa ett extremproblem. Vilket fall man väljer påverkar förstås väsentligt det räknearbete som behöver göras för att bestämma de "bästa" värdena på y_0 , v_0 och g . Det visar sig att det sistnämnda av alternativen ger ett extremproblem som är förhållandevis lätt att lösa och vi granskar den metoden, den så kallade *minstakvadratmetoden*, närmare här.

Litet terminologi: Man säger att man *minstakvadratanpassar* polynomet $y = y_0 + v_0 t - gt^2/2$ till de uppmätta värdena. Värdena y_0 , v_0 och g kallas en *minstakvadratlösning* till systemet (8.1) (eller en lösning till (8.1) i *minstakvadratmening*). Det minsta värdet på summan av skillnadernas kvadrater är kvadraten på anpassningens *medelfel* och är ett slags mått på hur bra anpassningen är.

Vi tillämpar först metoden på exemplet ovan, men för att de speciella koefficienterna inte skall skymma sikten för förfarandets allmän giltighet, formulerar vi om problemet i termer av lösning av linjära ekvationssystem med hjälp av matrisräkning:

8.5.2 Normalekvationen

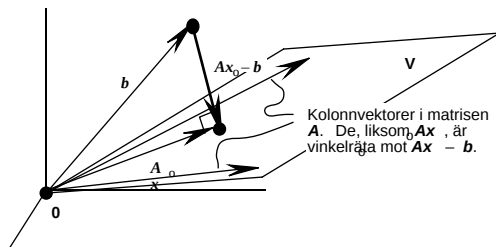
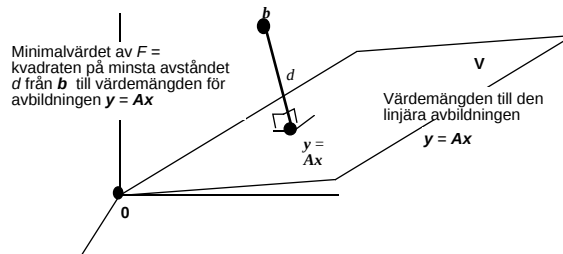
På matrisform kan systemet (8.1) skrivas

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

$$\text{där } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0.42 & -0.42^2/2 \\ 1 & 1.62 & -1.62^2/2 \\ 1 & 2.22 & -2.22^2/2 \\ 1 & 2.67 & -2.67^2/2 \\ 1 & 2.85 & -2.85^2/2 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} y_0 \\ v_0 \\ g \end{pmatrix} \text{ och } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 40 \\ 30 \\ 20 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Ett analogt geometriskt problem antyds i figuren här bredvid: Det gäller att minimera avståndet från det "plan", som utgör värdemängden $\mathbf{V}$ till avbildningen $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$,

till en punkt $\mathbf{b}$ som inte ligger i "planet". För minimipunkten $\mathbf{x}_0$ skulle i så fall vektorn mellan $\mathbf{b}$ och den närmaste punkten $\mathbf{A}\mathbf{x}_0$ på värdemängden vara vinkelrät mot varje vektor i denna värdemängd.



Eftersom $\mathbf{V}$ spänns upp av kolonnvektorer i matrisen $\mathbf{A}$, så måste skalärprodukten av var och en av dem med $\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}$ vara $= 0$. Men kolonnerna i $\mathbf{A}$ är identiska med raderna i transponatet $\mathbf{A}^T$, så det nyss sagda innebär att $\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) = \mathbf{0}$, d.v.s.

$$\boxed{\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}}$$

Minimipunkten $\mathbf{x}_0$ måste alltså satisfiera detta ekvationssystem – problemets så kallade *normalekvation*. För de fall där $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ är en inverterbar matris så gäller tydligen $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b}$.

Vi leds alltså till påståendet:

Sats 8.11: (Om minstakvadratanpassning)

Om $\mathbf{x}_0$ är minipunkt till funktionen

$$F(\mathbf{x}) = |\mathbf{Ax} - \mathbf{b}|^2,$$

där $\mathbf{A}$ är en avbildning $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$, så satisfierar $\mathbf{x}_0$ normalekvationen

$$\mathbf{A}^T \mathbf{Ax}_0 = \mathbf{A}^T \mathbf{b}.$$

I exemplet i avsnitt K8.1 är

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0.42 & -0.42^2/2 \\ 1 & 1.62 & -1.62^2/2 \\ 1 & 2.22 & -2.22^2/2 \\ 1 & 2.67 & -2.67^2/2 \\ 1 & 2.85 & -2.85^2/2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} y_0 \\ v_0 \\ g \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 40 \\ 30 \\ 20 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Detta ger (räknehjälpmedel som räknedosa eller matematikprogram som MatLab, Maple, Mathematica ... underlättar!):

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 9.78 & -11.4903 \\ 9.78 & 22.9806 & -28.724976 \\ -11.4903 & -28.724976 & 37.00098508 \end{pmatrix}$$

och

$$\mathbf{A}^T \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 105 \\ 150.75 \\ -148.12875 \end{pmatrix},$$

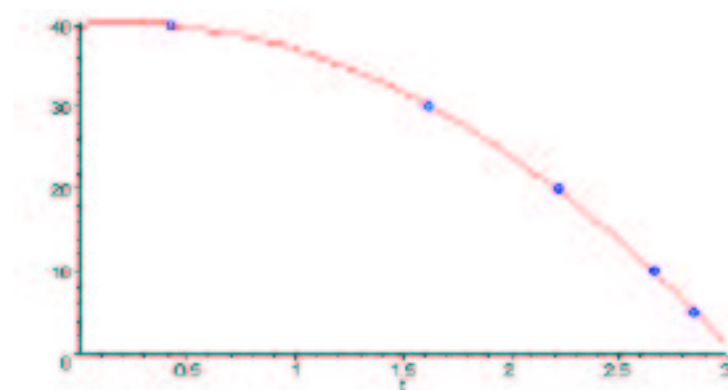
d.v.s. normalekvationen är:

$$\begin{pmatrix} 5 & 9.78 & -11.4903 \\ 9.78 & 22.9806 & -28.724976 \\ -11.4903 & -28.724976 & 37.00098508 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ v_0 \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 105 \\ 150.75 \\ -148.12875 \end{pmatrix},$$

med lösning:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_0 \\ v_0 \\ g \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 5 & 9.78 & -11.4903 \\ 9.78 & 22.9806 & -28.724976 \\ -11.4903 & -28.724976 & 37.00098508 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 105 \\ 150.75 \\ -148.12875 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 40.0150857 \\ 1.98494802 \\ 9.963902255 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

vilket ger närmevärdet $g \approx 9.96 \text{ m/s}^2$ för tyngdaccelerationen. Samtidigt avläser man att stenens höjd över marken i starten var $\approx 40.0 \text{ m}$ och dess uppåtriktade hastighet i startögonblicket $\approx 1.98 \text{ m/s}$. För stenens höjd som funktion av falltiden får man då sambandet: $y = 40 + 1.98t - 4.98t^2$. Följande diagram visar grafen för denna funktion tillsammans med mätpunkterna:



Ett mått på anpassningens godhet är det så kallade *kvadratiske medelfelet*: $\|\mathbf{Ax}_0 - \mathbf{b}\|/\sqrt{m}$, där m är antalet ekvationer i systemet, vilket här kan beräknas till ≈ 0.16 .

Anmärkning: Det kvadratiske medelfelet kan tolkas statistiskt: Om man antar att de mät fel man gjort, har orsakats av många små, sinsemellan oberoende störningar, så är sannolikheten för att komponenterna i x_0 avviker från de "korrekta" med mindre än medelfelet ungefär 68 alltså innebära att det korrekta värdet av tyngdaccelerationen g med c:a 68%:s sannolikhet ligger i intervallet $9.96 \pm 0.32 \text{ [m/s}^2\text{]}$.

*8.5.3 Härledning av det allmänna fallet

Resonemanget ovan, som ledde till normalekvationen och sats 8.11 kan verka allmängiltigt, men man bör notera att det byggde på en figur där $\mathbf{b}$ är en punkt i $\mathbf{R}^3$, medan $\mathbf{b}$ i räkneexemplet ligger i $\mathbf{R}^5$, så påståendet är inte självklart riktigt. Generaliseringen till det helt allmänna fallet, då $\mathbf{b}$ ligger i $\mathbf{R}^m$ och $\mathbf{x}$ i $\mathbf{R}^n$ är ännu mindre självklar. I detta avsnitt visas att sats 8.11 är sann också i dessa fall. Eftersom det beviset inte kan bygga på någon figur, måste det göras med enbart algebraiska och/eller analytiska metoder:

Några hjälpsamma observationer

Först en variant av kvadreringsregeln:

Hjälpsats 8.1:

Om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är kolonnvektorer (dvs $n \times 1$ -matriser)

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix},$$

så är $|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 + 2\mathbf{u}^T \mathbf{v}$.

Bevis: Man har nämligen att

$$|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 = (\mathbf{u} + \mathbf{v})^T (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = (\mathbf{u}^T + \mathbf{v}^T) (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{u}^T \mathbf{u} + \mathbf{u}^T \mathbf{v} + \mathbf{v}^T \mathbf{u} + \mathbf{v}^T \mathbf{v}.$$

Men alla dessa produkter är skalärer (1×1 -matriser) varför $\mathbf{v}^T \mathbf{u} = \mathbf{u}^T \mathbf{v}$ och $\mathbf{u}^T \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2$, $\mathbf{v}^T \mathbf{v} = |\mathbf{v}|^2$, alltså

$$|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 + 2\mathbf{u}^T \mathbf{v}. \quad \blacksquare$$

Sedan en observation om nollställena till $\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$:

Hjälpsats 8.2:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ om och endast om } \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Påståendet är självklart sant om $\mathbf{A}^T$ (och därmed även $\mathbf{A}$) är invertierbar, men poängen är att detta är riktigt för godtyckliga matriser $\mathbf{A}$ av godtyckligt format.

Bevis: Man har kedjan av implikationer:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{0} & \Rightarrow & \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{0} \\ \uparrow & & \downarrow \\ |\mathbf{A} \mathbf{x}|^2 = 0 & \Leftarrow & \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = 0 \end{array}$$

$$\text{d.v.s.} \quad \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad \blacksquare$$

Härledningen

Vi visar följande precisering av satsen 8.11 ovan:

Sats 8.12: (Minstakvadratmetoden)

För varje matris $\mathbf{A}$ och kolonnvektor $\mathbf{b}$ med samma antal rader som $\mathbf{A}$ har normalekvationen,

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x}_0 = \mathbf{A}^T \mathbf{b},$$

(minst) en lösning.

För varje sådan lösning x_0 gäller att

$$|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}|^2 \geq |\mathbf{A}\mathbf{x}_0 - \mathbf{b}|^2,$$

d.v.s. x_0 är minimipunkt till funktionen

$$F(\mathbf{x}) = |\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}|^2.$$

Bevis:

1. Att normalekvationen alltid har lösningar kan inses genom ett indirekt resonemang:

Anta att systemet inte har några lösningar. I så fall måste det finnas någon linjär kombination av raderna i matrisen $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ som är identiskt $= \mathbf{0}$

d.v.s. $\mathbf{c}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{0}$, för någon kolonnvektor $\mathbf{c}$,

medan *samma* linjära kombination av raderna i högerledet $\mathbf{b}$ är $\neq 0$, d.v.s.

$$\mathbf{c}^T \mathbf{A}^T \mathbf{b} \neq 0. \text{ }^1$$

Men eftersom $\mathbf{c}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{c})^T = 0$, har vi enligt hjälpsats 2 att $\mathbf{A} \mathbf{c} = \mathbf{0}$ och därmed också $\mathbf{c}^T \mathbf{A}^T = \mathbf{0}$. Detta ger motsägelsen $\mathbf{c}^T \mathbf{A}^T \mathbf{b} = 0$ – antagandet att systemet inte har några lösningar är alltså felaktigt.

2. Låt nu x_0 vara en godtycklig lösning till normalekvationen. Sätter vi $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{h}$, där $\mathbf{h}$ är en godtycklig vektor (av samma dimension

¹Om man exempelvis löser systemet med hjälp av Gausselimination – vilket inte är något annat än att man efter ett visst mönster linjärkombinerar ekvationerna i systemet till nya ekvationer – så måste förfarandet generera en ekvation av typen $\mathbf{0} \cdot \mathbf{x} = k \neq 0$, annars skulle ekvationssystemet $\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ ha en lösning.

som $\mathbf{x}$), så är

$$\begin{aligned}
 F(\mathbf{x}) &= |\mathbf{A}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{A}(\mathbf{x}_0 - \mathbf{b}) + \mathbf{h}|^2 \\
 &= \left[\begin{array}{l} \text{Sätt } \mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{x}_0 - \mathbf{b} \text{ och} \\ \mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{h} \text{ i hjälpsats 1.} \end{array} \right] \\
 &= |\mathbf{A}\mathbf{x}_0 - \mathbf{b}|^2 + |\mathbf{A}\mathbf{h}|^2 + 2\mathbf{h}^T \mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{x}_0 - \mathbf{b}) \\
 &= \left[\text{Men } \mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{x}_0 - \mathbf{b}) = \mathbf{0}. \right] \\
 &= |\mathbf{A}\mathbf{x}_0 - \mathbf{b}|^2 + |\mathbf{A}\mathbf{h}|^2 \geq |\mathbf{A}\mathbf{x}_0 - \mathbf{b}|^2 = F(\mathbf{x}_0). \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

8.5.4 När finns det bara en minimipunkt?

I räknexemplet ovan är matrisen $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ inverterbar varför normalekvationen har en enda lösning. Ett rätt enkelt ekvivalent villkor, som dessutom i praktiken ofta är uppfyllt ges av:

Hjälpsats 8.3:

Den kvadratiske matrisen $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ är inverterbar om och endast om kolonnvektorerna i $\mathbf{A}$ är linjärt oberoende.

Bevis: Den kvadratiske matrisen $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ är inverterbar.

$\Updownarrow$

Ekvationssystemet $\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{0}$ har bara den triviala lösningen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

$\Updownarrow$

Ekvationssystemet $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{0}$ har bara den triviala lösningen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

$\Updownarrow$

Kolonnvektorerna i $\mathbf{A}$ är linjärt oberoende. $\blacksquare$

För minstakvadratmetoden innebär detta:

Sats 8.13: (Entydighet hos minimipunkten)

Funktionen

$$F(\mathbf{x}) = |\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}|^2,$$

har en enda minimipunkt om och endast om kolonnvektorerna i $\mathbf{A}$ är linjärt oberoende.

Minimipunkten $\mathbf{x}_0$ ges av $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b}$.

En viktig typ av problem, där minimipunkten alltid är unik, är när man minstakvadratanpassar ett polynom av grad n ,

$$y = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots + c_n t^n,$$

till mätdata $(t_1, y_1), (t_2, y_2), \dots, (t_m, y_m)$ vid olika "tidpunkter" som är fler än gradtalet n , dvs $t_i \neq t_j$ om $i \neq j$ och $m > n$. Det inledande exemplet är av denna typ.

Sats 8.14: (Om polynomanpassning)

Kolonnvektorerna i matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^n \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \cdots & t_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & t_m & t_m^2 & \cdots & t_m^n \end{pmatrix}$$

där $t_i \neq t_j$ om $i \neq j$ och $m > n$, är linjärt oberoende.

Bevis:

Om $\mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{0}$ för någon vektor $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$, så har polynomet

$$p(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots + c_n t^n$$

de $m > n$ olika nollställena $t_1, t_2, \dots, t_m$. Eftersom inget polynom förutom nollpolynomet kan ha fler nollställen än sitt gradtal, så måste p vara nollpolynomet, d.v.s. $\mathbf{c} = \mathbf{0}$.

Övningar till avsnitt 8.5

8.20 Skriv upp normalekvationerna till systemen

a. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$

b. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$

$$\text{c. } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{d. } (1, 2, 3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 1,$$

$$\text{e. } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{f. } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{g. } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{h. } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

8.21 För vilka av systemen i uppgift 8.20 finns det bara en enda minstakvadratlösning?

8.22 Ange en minstakvadratlösning för var och en av systemen i uppgift 8.20.

8.23 a. Punkterna $(x, y, z) = (1, 3, 5)t + (2, 4, 6)s$, bildar ett plan genom origo. Vilken är den vinkelräta projektionen av punkten $(1, 0, 1)$ på detta plan?

b. Punkterna $(x, y, z) = (1, 2, 3)t$, bildar en rät linje genom origo. Vilken är den vinkelräta projektionen av punkten $(1, 0, 1)$ på denna linje?

8.24 Låt $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vara två vektorer i $\mathbf{R}^3$ och låt $\mathbf{L}$ vara den mängd punkter vars Ortsvektorer är linjära kombinationer av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$. ($\mathbf{L}$ är ett plan om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ inte är parallella och en linje om de är parallella och ej båda $\neq \mathbf{0}$.) Låt vidare $\mathbf{A}$ vara matrisen som har $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ som kolonner.

Verifiera dels att den på $\mathbf{L}$ belägna punkt y_0 , som ligger närmast punkten $\mathbf{b}$ ges av

$\mathbf{y}_0 = \mathbf{A}\mathbf{x}_0$, där x_0 är någon lösning till $\mathbf{A}^T \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}$
och dels att det minimala avståndet $= \sqrt{|\mathbf{b}|^2 - |y_0|^2}$.

-
- 8.25 a. Vilken av punkterna på planet i uppgift 8.23a ligger närmast punkten $(1, 0, 1)$ och vilket är det minimala avståndet?
b. Vilken av punkterna på den rätta linjen i uppgift 8.23b ligger närmast punkten $(1, 0, 1)$ och vilket är det minimala avståndet?
- 8.26 a. Visa att raderna i matrisen $\mathbf{A}$ är linjärt oberoende om och endast om matrisen $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ är inverterbar.
b. Visa att om raderna i matrisen $\mathbf{A}$ är linjärt oberoende så har normalekvationen $\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$ samma lösningar som det ursprungliga systemet $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
- 8.27 Bestäm ekvationen för den rätta linje $y = kx + l$ som i minstakvadratmening bäst anpassar till punkterna $(0, 0)$, $(2, 1)$ och $(3, 8)$. Bestäm också medelfelet.
- 8.28 Bestäm ekvationen för den rätta linje $y = kx + l$ som i minstakvadratmening bäst anpassar till punkterna $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 1)$ och $(3, 8)$. Bestäm också medelfelet.
- 8.29 Bestäm ekvationen för den parabel $y = ax^2 + bx + c$ som i minstakvadratmening bäst anpassar till punkterna $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 1)$ och $(3, 8)$. Bestäm också medelfelet.
- 8.30 Bestäm ekvationen för det plan $z = ax + by + c$ som i minstakvadratmening bäst anpassar till punkterna $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$, $(1, 2, 3)$ och $(2, 3, 6)$. Bestäm också medelfelet.
- 8.31 Den verksamma substansen, theophyllin, hos ett läkemedel mot astma försvinner enligt en matematisk modell ur kroppen enligt sambandet

$$c(t) = Ae^{-kt},$$

där $c(t)$ och A är koncentrationerna av theophyllinet i blodet vid tiderna t respektive 0 och k är en konstant, som är relaterad till individens utsöndringsförmåga.

I syfte att kunna planera doceringen hos läkemedlet – koncentrationen av theophyllin måste hela tiden ligga i ett visst intervall för att läkemedlet skall ha avsedd effekt – vill man för en viss person empiriskt bestämma konstanten k . Läkemedlet injicerades i patienten och man mätte sedan theophyllinkoncentrationerna i blodet vid olika tidpunkter. Mätningarna sammanfattas i tabellen här bredvid:

Antal timmar	Koncentration [mg/l]
1	10.0
5	5.0
9	2.5
13	1.5
15	1.0
19	0.5

Relationen ovan kan efter logaritmering skrivas

$$\ln c = \ln A - kt$$

Minstakvadratanpassa konstanterna $\ln A$ och k till de givna mätvärdena.

Svar till uppgifterna

8.20 a. $\begin{pmatrix} 35 & 44 \\ 44 & 56 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix},$

b. $\begin{pmatrix} 17 & 22 & 27 \\ 22 & 29 & 36 \\ 27 & 36 & 45 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$

c. $\begin{pmatrix} 17 & 22 & 27 \\ 22 & 29 & 36 \\ 27 & 36 & 45 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$

d. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$

e. $6x = 4,$

f. $\begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 14 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$

g. $\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$

h. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

8.21 De där kolonnerna är linjärt oberoende, dvs. a, e f och h.

8.22 a. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix},$

b. T.ex. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/3 \\ 4/3 \\ 0 \end{pmatrix},$
 (allmän lösning: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/3 + t \\ 4/3 - 2t \\ t \end{pmatrix}),$

c. T.ex. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/3 \\ 4/3 \\ 0 \end{pmatrix},$
 (allmän lösning: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/3 + t \\ 4/3 - 2t \\ t \end{pmatrix}),$

d. T.ex. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$

$$(\text{allmän lösning: } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2s - 3t \\ s \\ t \end{pmatrix}),$$

e. $x = 2/3,$

f. T.ex. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3/2 \end{pmatrix},$

(obs att matrisen för systemet i 8.20f är inverterbar, så normalekvationen har samma lösning som det givna systemet),

g. T.ex. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 \\ 0 \end{pmatrix},$

$$(\text{allmän lösning: } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 - 2t \\ t \end{pmatrix}),$$

h. T.ex. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$

8.23 *Ledning:* Lämpligt att använda resultaten från uppgifterna 8.22.a och e.

a. $(2/3, 2/3, 2/3),$

b. $(2/3, 4/3, 2).$

8.25 *Ledning:* Lämpligt att använda resultaten från uppgifterna 8.22.a och e.

a. $(-1/3, 2/3, -1/3),$ minimalavståndet $= \sqrt{2/3},$

b. $(2/3, 4/3, 2),$ minimalavståndet $= \sqrt{26}/3.$

8.25 *Ledningar:*

a. Tillämpa hjälpsats 3 på $\mathbf{A}$'s transponat.

b. Multiplicera relationen $\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}$ med $\mathbf{A}$ från vänster och tillämpa resultatet från a-uppgiften.

8.27 $y = (33x - 13)/14.$ Kvadratiske medelfelet $= 13/\sqrt{42} \approx 2.01.$

$$(\text{Normalekvationen är } \begin{pmatrix} 13 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ 9 \end{pmatrix}).$$

8.28 $y = (24x - 11)/10.$ Kvadratiske medelfelet $= 61/\sqrt{20} \approx 1.75.$

$$(\text{Normalekvationen är } \begin{pmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 \\ 10 \end{pmatrix}).$$

8.29 $y = 3x^2/2 - 21x/10 + 2/5.$ Kvadratiske medelfelet $= 2/\sqrt{5} \approx 0.89.$

$$(\text{Normalekvationen är } \begin{pmatrix} 98 & 36 & 14 \\ 36 & 14 & 6 \\ 14 & 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 77 \\ 27 \\ 10 \end{pmatrix}.)$$

8.30 $z = 2y - 1/2$. Kvadratiske medelfelet $= 1/2$.

$$(\text{Normalekvationen är } \begin{pmatrix} 6 & 9 & 4 \\ 9 & 14 & 6 \\ 4 & 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 25 \\ 10 \end{pmatrix}.)$$

8.31 $\ln A \approx 2.448$ och $k \approx 0.1637$.

$$(\text{Normalekvationen är } \begin{pmatrix} 6 & 62 \\ 62 & 862 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.54063 \\ 10.6967 \end{pmatrix}.)$$