

1. Bestäm eventuella lokala extrempunkter (och deras karaktär) till följande funktioner:
 - a. $f(x,y) = 2xy^2 + x^2 + 4y$
 - b. $f(x,y) = 2x + y + 3\sqrt{1 + x^2 + y^2}$
 - c. $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$.
 - d. $f(x,y) = 3x^3 - 9x + 3y - y^3$.
 - e. $f(x,y) = x^2 + 2xy - y^3$.
2. Är det sant att $2x^2 + 3y^2 + 4\sin x \sin y \geq 0$ om (x,y) ligger tillräckligt nära origo?
3. Verifiera att funktionen $f(x,y) = (1+y)^3x^2 + y^2$ endast har en kritisk punkt och att f antar i denna ett lokalt minimivärde. Är detta värde funktionens minsta värde?

Svar:

1.
 - a. Det finns inga lokala extrempunkter. Det finns en sadelpunkt $(-1,1)$.
 - b. Lokalt minimum i $(-1,-1/2)$.
 - c. Lokalt minimum i $(1,1)$. (sadel i $(0,0)$.)
 - d. Lokalt min i $(1,-1)$, lokalt maximum i $(-1,1)$. (sadel i $(1,1)$ och $(-1,-1)$.)
 - e. Lokalt minimum i $(2/3,-2/3)$, lokalt maximum i $(-1,1)$. (sadel i $(0,0)$.)
2. Ja.
3. Lokal minimum i $(0,0)$. $f(0,0)$ är inte funktionens minsta värde då t.ex $f(0,0) > f(3,-2)$.
(Jämför detta med funktioner av en variabel: Om $f(x)$ endast har en kritisk punkt och om f antar i denna ett lokalt minimivärde så är detta värde funktionens minsta värde.)

Dagens 10/12

4. Sök största och minsta värdet av funktionen $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$ på cirkeln $x^2 + y^2 = 1$.
5. Sök största och minsta värdet av funktionen $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y^2 - 2y$ på och inom triangeln med hörnen i punkterna $(2,-2)$, $(2,3)$ och $(-3,-2)$.
6. Sök största och minsta värdet av funktionen $f(x,y) = x^2 - y^2 + 4y$ då $x^2 + y^2 \leq 9$ och $y \geq 1$.
7. Visa att $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} \leq 6$ om $x^2 + y^2 \leq 1$.
8. Kan summan av tre positiva tal vara 5 om deras produkt är 8?
9. Bestäm värdemängden till funktionen $f(x,y) = x^2y + 2y^2 - 4xy$ då definitionsmängden ges av $0 \leq x \leq 4$ och $0 \leq y \leq x^2$.

Svar:

4. $9/4$ och 0 .
5. 24 och -1 .
6. 11 och 3 .
8. Aldrig i livet!
9. Intervallet $[-2, 512]$.

10. Ange en minstakvadratlösning till ekvationssystemet

$$\text{a.} \quad \begin{cases} x + y = 2 \\ x - 2y = 0 \\ 2x - y = 11 \\ x - y = 0 \end{cases}.$$

$$\text{b.} \quad \begin{cases} x - y = 0 \\ x + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 7 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

11. Punkterna $(x,y,z) = s(1,1,2) + t(2,1,0)$ bildar i $\mathbf{R}^3$ ett plan genom origo. Vilken av punkterna i planet ligger närmast punkten $(3,-1,2)$ och vilket är den minimala avståndet?

12. Punkterna $(x,y,z,v) = s(1,1,2,0) + t(2,1,0,1)$ bildar i $\mathbf{R}^4$ ett plan genom origo. Vilken av punkterna i planet ligger närmast punkten $(4,-3,2,-1)$ och vilket är den minimala avståndet?

13. Ange ekvationen för den räta linje $y = ax + b$ som i minstakvadratmening bäst anpassar till punkterna $(-1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ och $(2,2)$. Beräkna också medelfelet.

Svar:

10. a. $x = 4, y = 1.$

b. t.ex $x = 1, y = 2, z = 0.$ (Allmän minstakvadratlösning $(1 - t, 2 - t, t).$)

11. $(13/7, 9/7, 10/7); 2\sqrt{21}/7.$

12. $(4/3, 1, 4/3, 1/3); 2\sqrt{57}/3.$

13. $y = \frac{3}{5}x + \frac{7}{10}; \frac{\sqrt{5}}{10}.$

Dagens 13/12. Detta är sista dagens.

14. Ange ekvationen för den parabel $y = ax^2 + bx + c$ som i minstakvadratmening bäst anpassar till punkterna $(-1,2)$, $(0,1)$, $(1,4)$ och $(2,6)$. Beräkna också medelfelet.
15. Ange en minstakvadratlösning till ekvationssystemet $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + y = 4 \\ x + y = 5 \end{cases}$. Beräkna också kvadratiska medelfelet.
16. Bestäm funktionen $y = ax + bx^2 + c \sin \frac{\pi x}{2}$ som i minstakvadratmening bäst anpassar mätvärdena $(0,0)$, $(1,4)$, $(2,7)$ och $(3,13)$.
17. Visa att det i en omgivning av punkten $(1,2)$ finns precis en funktion $z = z(x,y)$ med kontinuerliga partiella derivator sådan att $3z \sin(y-2) + e^{x-z} = 1$ och $z(1,2) = 1$. Beräkna riktningsderivatan till funktionen z i punkten $(1,2)$ i riktning mot punkten $(4,6)$.

Svar:

14. $y = \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{7}{4}; \frac{\sqrt{5}}{4}$.
15. $x = 3, y = -1$. Kvadratiska medelfelet $= \sqrt{33}/3$.
16. $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}x^2 + 2 \sin \frac{\pi x}{2}$.
17. 3