$$z^2 = -3 + 4i$$

$$|-3+4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$-3+4i = 5e^{i\varphi}$$

$$\cos\varphi = -\frac{3}{5} \qquad ??$$

$$\sin\varphi = \frac{4}{5}$$

SVÅRT ATT BESTÄMMA VINKELN

Alternativ angreppsmetod:

sätt $z = x + iy$. Det ger

$$z^2 = (x+iy)^2 = (x^2 - y^2) + i2xy.$$

Vi identifierar real och imaginär delar i ekvationen

$$z^2 = -3 + 4i$$

Det ger ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ 2xy = 4 \end{cases}$$

Från den andra ekvationen får vi att $y = \frac{4}{2x} = \frac{2}{x}$ och sätter vi in det i den första ekvationen får vi

$$x^2 - \left(\frac{2}{x}\right)^2 = -3$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - \frac{4}{x^2} = -3$$

$$\Rightarrow \quad x^4 + 3x^2 - 4 = 0$$

Sätt $t = x^2$. Då kan ekvationen skrivas

$$t^2 + 3t - 4 = 0$$

vilket ger

$$t = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 4}$$

$$= -\frac{3}{2} \underset{(-)}{+} \frac{5}{2} = 1$$

förkastas då $t \geq 0$.

Så $x^2 = 1$, vilket ger

$x = \pm 1$ som ger $y = \frac{2}{x} = \pm 2$

Vi får lösningarna: $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = -1 - 2i$.

Ex: Lös ekvationen

$$z^2 + (2-4i)z - 4 - (4+\sqrt{3})i = 0$$

Lösn: Vi börjar med att kvadratkomplettera $(z+(1-2i))^2 = z^2 + 2(1-2i)z + (1-2i)^2$

$(1-2i)^2 = 1^2 - 4 - 4i$

$$(z+(1-2i))^2 - 4 - (4+\sqrt{3})i - (1-2i)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (z+(1-2i))^2 = 1+\sqrt{3}\,i$$

Sätt $w = z + (1-2i)$ då har vi

$$w^2 = 1+\sqrt{3}\,i$$

Vi sätter $w = x + iy$ och identifierar real- och imaginärdelarna

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ 2xy = \sqrt{3}. \end{cases}$$

Lös ut y ur den andra ekvationen

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2x}$$

vilket ger insatt i 1:a ekvationen

$$x^2 - \frac{3}{4x^2} = 1 \Leftrightarrow x^4 - x^2 - \frac{3}{4} = 0$$

Sätt $t = x^2$. Vi får så

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \frac{a}{a^2} = \frac{1}{a}$$

$$t^2 - t - \frac{3}{4} = 0$$

vilket ger $t = \frac{1}{2} \pm(-)\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \frac{3}{2}$.

Alltså $x^2 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

Då $y = \frac{\sqrt{3}}{2x}$ får vi $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$y = \frac{\cancel{\sqrt{3}}\,\cancel{\sqrt{2}}\,1}{\cancel{2}\,\cancel{\sqrt{3}}\,\sqrt{2}}$$

Det ger oss

$$w_1 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad w_2 = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Vi avslutar med att ta fram z. Vi har att

$$w = z + (1-2i)$$

så $z = w - (1-2i)$

vilket ger lösningarna

$$z_1 = w_1 - (1-2i) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 + 2i$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - 1\right) + i\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 2\right)$$

$$z_2 = w_2 - (1-2i) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - 1\right) + i\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + 2\right)$$

Algebrans fundamental sats:

Varje polynomekvation

$(n \geq 1)$ $\quad a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$

har minst en komplex rot.

Följdsats: Varje polynom kan faktoriseras i linjära (grad 1) faktorer. (typ $ax+b$)

Bevis: Låt c vara en rot till ekvationen $p(x) = 0$.
(c finns enligt algebrans fundamental sats)
Vi kan då dela $p(x)$ med faktorn $(x - c)$, dvs $p(x) = (x - c)\,q(x)$
där $\text{grad}\, q(x) = \text{grad}\, p(x) - 1$
Upprepa proceduren på $q(x)$.
Fortsätt tills kvoten har grad $= 1$.

Ex: Faktorisera polynomet

$$z^3+8.$$

$$2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad 2\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\parallel \qquad \parallel$$

Lösn: $(z-(-2))\left(z-\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\right)\left(z-\left(2e^{i\frac{5\pi}{3}}\right)\right)$

$$z = re^{i\varphi} \qquad z^3 = r^3 e^{i3\varphi}$$

$$z^3 = -8 = 8e^{i\pi} \implies r^3 = 8 \implies r = 2$$

$$3\varphi = \pi + 2\pi n$$

$$\varphi = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}$$

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi m,\ \varphi_2 = \pi + 2\pi m,\ \varphi_3 = \frac{5\pi}{3} + 2\pi m$$

Multipla rötter:

Om $p(x) = (x-1)^2(x-3)$

säger vi att $x=1$ är en dubbel rot till ekvationen

$$p(x)=0.$$

På samma sätt för högre multiplicitet.

Sats: En n:e grads ekvation har n rötter räknade med multiplicitet.
(antalet rötter utan multiplicitet blir därmed alltid $\leq n$ st)

Bevis: Ett n:e gradspolynom kan faktoriseras i n st faktorer.

Ex: $z^3 + 8 = 0$

Konjugerar vi ekvationen får vi

$$\overline{(z^3) + 8} = \overline{0}$$

$$\Leftrightarrow \overline{(z^3)} + \overline{8} = \overline{0}$$

$$\Leftrightarrow \bar{z}^3 + 8 = 0$$

Alltså om $z = c$ är en rot måste också $z = \bar{c}$ vara en rot.

Sats: Låt $p(x)$ vara ett polynom med reella koefficienter. Då gäller att om c är en rot så är också $\overline{c}$ en rot.

Bevis: $p(z) = a_n z^n + \ldots + a_0$

Låt $z=c$ vara en rot till $p(z)=0$ och konjugera $p(c)=0$.

$$\overline{a_n c^n} + \ldots + \overline{a_0} = 0 \Leftrightarrow p(\overline{c}) = 0$$

OBS! Detta gäller enbart om polynomet har reella koefficienter. Tex är lösningarna till $z^2 = i$ ej konjugerade.

Följdsats: Varje reellt polynom kan faktoriseras i reella faktorer av högst grad 2.

Bevis: $(x-c)(x-\bar{c}) = x^2 - (c+\bar{c})x + |c|^2$
$= x^2 - 2(\operatorname{Re} c)x + |c|^2$.

Ex: Lös ekvationen $z^4+4=0$

En rot är $z=1+i$.

Lösn:

$z_1 = 1+i$ $\quad (z-(1+i))(z-(1-i))$

$z_2 = 1-i$ $\quad = z^2-2z+2$

$z_3 = -1+i$

$z_4 = -1-i$

$$z^4+4=(z^2-2z+2)(z^2+2z+2)$$