Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark.

Lösningsförslag till tentan i 5B1147 Envariabelanalys för E1, 06–12–20, kl. 14.00–19.00.

- Inga hjälpmedel.
- Du som har fått godkänt på kontrollskrivning i (där $i = 1, 2, 3, 4$) får automatiskt full poäng på tal i.
- Betygsgränser: 14–18 poäng ger betyget 3, 19–24 poäng ger betyget 4, och 25–28 poäng ger betyget 5.
- Om du har fått 13 poäng så har du möjlighet att göra en kompletteringstentamen. Kontakta Olle i så fall.

1. *Bestäm talet a så att funktionen*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2-x-1}{x-1} & \text{då } x \neq 1, \\ a & \text{då } x = 1, \end{cases}$$

blir kontinuerlig i punkten $x = 1$. (3p)

Lösning: Division $\Longrightarrow f(x) = 2x + 1$ då $x \neq 1 \Longrightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = 3 \Longrightarrow f(x)$ kontinuerlig i $x = 1$ om $a = 3$.

2. *Funktionen*

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{4}{1-x}$$

är uppenbarligen definierad då $x \neq 0$ *och* $x \neq 1$. *Bestäm* f*:s värdemängd då* $0 < x < 1$. (3p)

Lösning: Observera först att $x \to 0^+ \Longrightarrow f(x) \to \infty$ och $x \to 1^- \Longrightarrow f(x) \to \infty$. Sedan ser vi att

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{4}{(1-x)^2} = \frac{-(1-x)^2 + 4x^2}{x^2(1-x)^2} = \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^2(1-x)^2},$$

så derivatan är $= 0$ då

$$x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} = 0 \iff x = -\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1+3}{9}} = \frac{-1 \pm 2}{3} = \begin{cases} 1/3 \\ -1 \end{cases} .$$

Härur ser vi att

$$f'(x) = \frac{3(x+1)(x-1/3)}{x^2(1-x)^2}.$$

$f'(x) < 0$ då $-1 < x < 1/3 \implies f(x)$ avtagande där, och $f'(x) > 0$ då $x > 1/3 \implies f(x)$ växande där $\implies$

$$f_{\min} = f(1/3) = \frac{1}{1/3} + \frac{4}{2/3} = 3 + 6 = 9,$$

så att värdemängden är $\{9 \le y < \infty\}$.

3. *Beräkna integralen*

$$I = \int_0^1 \frac{x+3}{x^2+4x+5}\,dx. \qquad \text{(3p)}$$

Lösning:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{x+3}{(x+2)^2+1}\,dx = \int_0^1 \left(\frac{x+2}{(x+2)^2+1} + \frac{1}{(x+2)^2+1} \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{2}\ln((x+2)^2+1) + \arctan(x+2) \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}\ln 10 + \arctan 3 - \frac{1}{2}\ln 5 - \arctan 2 \\ &= \frac{1}{2}\ln 2 + \arctan 3 - \arctan 2. \end{aligned}$$

4. *Beräkna gränsvärdet*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{2x - \sin 2x}. \qquad \text{(3p)}$$

Lösning:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{2x - \sin 2x} &= \frac{''0''}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{2 - 2\cos 2x} = \frac{''0''}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{4\sin 2x} \\ &= \frac{''0''}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{8\cos 2x} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

5. *Visa att*
$$\ln\left(\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1/2x}\right) > 1 \quad \text{då} \quad 0 < x < 1. \qquad (4p)$$

Lösning: Enligt logaritmlagarna är olikheten ekvivalent med att

$$\frac{1}{2x}\left(\ln(1+x) - \ln(1-x)\right) > 1 \iff \ln(1+x) - \ln(1-x) - 2x > 0.$$

Sätter vi $f(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x) - 2x$, så ska vi alltså visa att $f(x) > 0$ då $0 < x < 1$. Observera först att $f(0) = 0 - 0 - 0 = 0$. Sedan ser vi att

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} - 2 = \frac{1-x+1+x-2+2x^2}{1-x^2} = \frac{2x^2}{1-x^2},$$

som är > 0 då $0 < x < 1$. Härav följer det att $f(x)$ *växer* från $f(0) = 0$ då x går från 0 till 1, så att $f(x) > 0$ åtminstone när $0 < x < 1$.

6. *Bestäm allmänna lösningen till differentialekvationen*
$$y'' - 3y' + 2y = e^{3x}\cos x. \qquad (4p)$$

Lösning: Karakteristiska ekvationen $r^2 - 3r + 2 = 0$ har rötterna

$$r = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9-8}{4}} = \frac{3\pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases},$$

varför den homogena lösningen blir

$$y_{\text{hom}}(x) = Ae^{x} + Be^{2x}.$$

Observera sedan att om z_p är en partikulärlösning till $z'' - 3z' + 2z = e^{(3+i)x}$, så är $\operatorname{Re} z_p$ en lösning till

$$(\operatorname{Re} z)'' - 3(\operatorname{Re} z)' + 2\operatorname{Re} z = \operatorname{Re}\left(e^{3x}\cdot(\cos x + i\sin x)\right) = e^{3x}\cos x,$$

det vill säga till originalekvationen. Ansatsen $z_p = a\cdot e^{(3+i)x}$ ger

$$z_p' = a\cdot(3+i)e^{(3+i)x} \text{ och } z_p'' = a\cdot(3+i)^2 e^{(3+i)x},$$

varefter insättning leder till

$$
\begin{aligned}
& a \cdot e^{(3+i)x} \cdot ((3+i)^2 - 3(3+i) + 2) = e^{(3+i)x} \iff \\
& a \cdot (9 + 6i - 1 - 9 - 3i + 2) = 1 \iff a \cdot (1+3i) = 1 \implies \\
& z_p = \frac{e^{3x}(\cos x + i \sin x)}{1+3i} \cdot \frac{1-3i}{1-3i} \\
& \implies \operatorname{Re} z_p = \frac{e^{3x}(\cos x + 3\sin x)}{10}.
\end{aligned}
$$

$$\text{SVAR:} \quad y = Ae^x + Be^{2x} + \frac{e^{3x}}{10}(\cos x + 3\sin x).$$

7. *Beräkna längden av kurvan*

$$y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad \text{där} \quad 0 \le x \le \ln 2. \qquad (4p)$$

Lösning: Formeln för båglängd är

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx.$$

Här fås

$$
\begin{aligned}
& y' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \implies 1 + (y')^2 = 1 + \frac{1}{4}(e^{2x} - 2 + e^{-2x}) \\
& = \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2,
\end{aligned}
$$

så att längden av kurvan blir

$$s = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x + e^{-x}}{2}\, dx = \frac{1}{2}\big[e^x - e^{-x}\big]_0^{\ln 2} = \frac{1}{2}(2 - \frac{1}{2} - 1 + 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4}.$$

8. (a) *Beräkna integralen*

$$\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}}\, dx. \qquad (2p)$$

Lösning: Variabelbytet $t = \sqrt{x} \Longrightarrow x = t^2 \Longrightarrow dx = 2t\,dt$, så att

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-\sqrt{x}}\,dx &= \lim_{R\to\infty} \int_0^{\sqrt{R}} e^{-t}\cdot 2t\,dt \\
&= \lim_{R\to\infty} \left[-e^{-t}\cdot 2t\right]_0^{\sqrt{R}} + 2\lim_{R\to\infty} \int_0^{\sqrt{R}} e^{-t}\,dt \\
&= -2\lim_{R\to\infty} \frac{\sqrt{R}}{e^{\sqrt{R}}} + 2\lim_{R\to\infty} \left[-e^{-t}\right]_0^{\sqrt{R}} \\
&= 0 + 2(1 - \lim_{R\to\infty} e^{-\sqrt{R}}) = 2.
\end{aligned}$$

(b) *Visa att serien* $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\sqrt{k}}$ *är konvergent.* (2p).
Lösning: Vi tolkar n:te delsumman

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} e^{-\sqrt{k}} = 1\cdot e^{-\sqrt{1}} + 1\cdot e^{-\sqrt{2}} + \cdots + 1\cdot e^{-\sqrt{n}}$$

som den sammanlagda arean av n stycken rektanglar med basen 1 (liggandes mellan $x = k-1$ och $x = k$) och höjden $e^{-\sqrt{k}}$, där $k = 1, 2, 3, \ldots, n$. Eftersom

$$f(x) = e^{-\sqrt{x}} \Longrightarrow f'(x) = e^{-\sqrt{x}}\cdot\left(-\frac{1}{2}x^{-1/2}\right) < 0,$$

är $f(x)$ *avtagande* då $x > 0$, och härav följer att rektanglarna ovan ligger *under* kurvan $y = e^{-\sqrt{x}}$ då $0 \le x \le n$. Därmed blir

$$\begin{aligned}
s_n &< \int_0^n e^{-\sqrt{x}}\,dx = \{t = \sqrt{x} \text{ som ovan }\} = \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t}\cdot 2t\,dt \\
&= \left[-e^{-t}\cdot 2t\right]_0^{\sqrt{n}} - 2\left[e^{-t}\right]_0^{\sqrt{n}} = -\frac{2\sqrt{n}}{e^{\sqrt{n}}} - \frac{2}{e^{\sqrt{n}}} + 2 \\
&< 2 \quad \text{för alla } n.
\end{aligned}$$

Alltså är $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ en *växande* och *uppåt begränsad* talföljd, varav följer att $\lim_{n\to\infty} s_n$ finns, det vill säga serien är *konvergent.*