Institutionen för Matematik, KTH,
Karim Daho och Olle Stormark.

Lösningsförslag till 5B1147 Envariabelanalys för E, ME och IT
07–05–31, kl. 8.00–13.00.

- Inga hjälpmedel.
- Du som har fått godkänt på kontrollskrivning i (där $i = 1, 2, 3, 4$) får automatiskt full poäng på tal i.
- Betygsgränser: 14–18 poäng ger betyget 3, 19–24 poäng ger betyget 4, och 25–28 poäng ger betyget 5.
- Om du har fått 13 poäng så har du möjlighet att göra en kompletteringstentamen. Kontakta Karim eller Olle i så fall.

1. *Beräkna gränsvärdet*
$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x} - x. \qquad \text{(3p)}$$

Lösning: Genom att observera att $\sqrt{x^2} = |x|$, som är $= x$ då x är positiv, ser man att

$$\sqrt{x^2+x} - x = \frac{(\sqrt{x^2+x}-x)(\sqrt{x^2+x}+x)}{\sqrt{x^2+x}+x} = \frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}$$
$$= \frac{x}{x\cdot(\sqrt{1+x^{-1}}+1)} = \frac{1}{\sqrt{1+x^{-1}}+1},$$

som uppenbarligen går mot $1/2$ då $x \to \infty$.

2. *Visa att* $e^x(1-x) \leq 1$ *för alla* x. (3p)

Lösning: $f(x) = e^x(1-x) = e^x - e^x x \Longrightarrow f'(x) = e^x - e^x x - e^x = -xe^x$, som är > 0 då x är negativ och < 0 då x är positiv. Det vill säga att $f(x)$ växer för negativa x och avtar för positiva x, vilket betyder att $f(x)$ har ett globalt maximum $= f(0) = 1$ då $x = 0$.

Alltså är $f(x) \leq f(0) = 1$ för alla x.

3. *Beräkna integralen*
$$I = \int_0^7 \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x+1}}. \tag{3p}$$

Lösning:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^7 \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x+1}} = \{u = x+1 \iff x = u-1 \Longrightarrow dx = du\} \\ &= \int_{u=1}^{u=8} \frac{(u-1)\,du}{u^{1/3}} = \int_1^8 (u^{2/3} - u^{-1/3})\,du = \left[\frac{3}{5}u^{5/3} - \frac{3}{2}u^{2/3}\right]_1^8 \\ &= \frac{3}{5}(8\cdot 4 - 1) - \frac{3}{2}(4-1) = \frac{3\cdot 31}{5} - \frac{3\cdot 3}{2} = \frac{186-45}{10} = 14,1. \end{aligned}$$

4. *Avgör om serien*
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2+n)^n}$$
är konvergent eller divergent. (3p)

Lösning: Vi har att
$$0 < \frac{1}{(2+n)^n} < \frac{1}{2^n},$$
så jämförelse med den geometriska serien $\sum_{n=1}^{\infty}(1/2)^n$ – som är konvergent eftersom $-1 < 1/2 < 1$ – visar att serien ovan *är konvergent.*

5. *Avgör om ekvationen $x^{-x} = 3$ har någon lösning då $x > 0$.* (4p)

Lösning: $f(x) = x^{-x} - 3 = e^{-x\ln x} - 3 \Longrightarrow f'(x) = e^{-x\ln x}\cdot(-\ln x - 1)$, som är $= 0 \iff \ln x = -1 \iff x = e^{-1} = 1/e$. Då $0 < x < 1/e$ är $f'(x) > 0$, så där är $f(x)$ växande. När $x > 1/e$ är $f'(x) < 0$ och $f(x)$ är avtagande. Alltså har $f(x)$ ett globalt maximum lika med $f(1/e) = (1/e)^{-1/e} - 3 = e^{1/e} - 3$ i punkten $x = 1/e$. Eftersom $e^{1/e} < 3^{1/e} < 3$ är $f(x) < 0$ för alla $x > 0$, så ekvationen ovan har ingen lösning.

6. *Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' + 4y = x^2$ vars graf tangerar den räta linjen $y = x$ i origo.* (4p)

Lösning: Karakteristiska ekvationen $r^2 + 4 = 0$ har rötterna $r = \pm 2i$, så
$$y_{\text{hom}}(x) = A\cos 2x + B\sin 2x.$$

Genom att sätta in ansatsen $y_{\text{part}} = ax^2 + bx + c$ i ekvationen ser vi att $a = 1/4$, $b = 0$ och $c = -1/8$. Därmed blir den allmänna lösningen lika med

$$y(x) = A\cos 2x + B\sin 2x + \frac{x^2}{4} - \frac{1}{8}.$$

Begynnelsevillkoret $y(0) = 0$ ger att $0 = A - 1/8 \iff A = 1/8$ och villkoret $y'(0) = 1$ ger att $1 = 2B \iff B = 1/2$. Så svaret blir

$$y(x) = \frac{1}{8}\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{x^2}{4} - \frac{1}{8}.$$

7. *Bestäm en primitiv funktion till*

$$f(x) = \frac{3x}{x^3+1}. \qquad \text{(4p)}$$

Lösning: $x^3 + 1 = 0$ har roten $x = -1$. Division med $x + 1$ visar att

$$x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1),$$

där

$$x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}.$$

Partialbråksuppdelning visar att

$$f(x) = \frac{3x}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx + C}{x^2 - x + 1}.$$

Genom att göra liknämnigt och sedan identifiera koefficienterna framför de olika x-potenserna ser man att

$$f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{x-2}{x^2-x+1}.$$

Här är

$$\frac{x-2}{x^2-x+1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2x-1-3}{x^2-x+1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2x-1}{x^2-x+1} - \frac{3/2}{x^2-x+1},$$

så att

$$f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{3/2}{x^2-x+1}.$$

Sista termen här kan skrivas som

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{4}{3}(x-\frac{1}{2})^2} = 2\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2}.$$

Därmed ser vi till slut att

$$f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2x-1}{x^2-x+1} + 2\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2},$$

som uppenbarligen har den primitiva funktionen

$$F(x) = \ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) + \sqrt{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

8. *Beräkna gränsvärdet*

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)^2}{(\cosh x-1)^3},$$

där $\cosh x = (e^x+e^{-x})/2$. *MacLaurinserierna för* $\sin x$ *och* e^x *antas vara kända, och behöver alltså inte härledas.* (4p)

Lösning: Eftersom

$$x - \sin x = x - x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \cdots = \frac{x^3}{6} + B_1\cdot x^5,$$

där B står för en funktion som är begränsad då x är nära 0, så är

$$\text{täljaren } = \frac{x^6}{36} + B_t\cdot x^8.$$

Vidare är

$$\begin{aligned}\cosh x - 1 &= \frac{1}{2}(e^x+e^{-x}-2) = \frac{1}{2}(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+1-x+\frac{x^2}{2!}-\cdots-2)\\ &= \frac{x^2}{2} + B_2\cdot x^4,\end{aligned}$$

vilket visar att

$$\text{nämnaren } = \frac{x^6}{8} + B_n x^8.$$

Därmed ser vi att

$$\frac{(x-\sin x)^2}{(\cosh x-1)^3} = \frac{\frac{x^6}{36}+B_t\cdot x^8}{\frac{x^6}{8}+B_n\cdot x^8} = \frac{\frac{1}{36}+B_t\cdot x^2}{\frac{1}{8}+B_n\cdot x^2},$$

som går mot $8/36 = 2/9$ då $x \to 0$.