MATLAB Laboration

problem med lokala extremvärden

Sonja Hiltunen, sohnya@gmail.com
Sanna Eskelinen, eskelinen.sanna@gmail.com

Handledare: Karim Daho
Flervariabelanalys 5B1148

Innehållsförteckning

Problem 1

Problem: Finn och klassificiera alla kritiska punkter till

f(x,y) = $e^{-2y^2-4xy-x^4}$ (1)

Lösning: Först deriveras funktionen med avseende på x och y. Kritiska punkter finns där båda derivatorna är lika med 0. I MATLAB skrivs koden

```
fx=diff(f,x)
fy=diff(f,y)
```

Vilket ger

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (-4y - 4x^3)e^{-2y^2-4xy-x^4} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = (-4y - 4x)e^{-2y^2-4xy-x^4}$$

MATLABs solve funktion användes för att finna nollställena.

```
[xcr,ycr]=solve(fx,fy); [xcr,ycr]
```

Funktionen har tre nollställen, (0,0), (1,-1), (-1,1). För att bestämma deras karaktär används Hessiandeterminaten. För att kunna finna Hessiandeterminanten behövs även andraderivatorna.

```
fxx=diff(fx,x);
fxy=diff(fx,y);
fyy=diff(fy,y);

hessdetf=fxx*fyy-fxy^2
```

Om determinanten är negativ, är nollstället en sadelpunkt. Om determinanten har ett positivt värde, är den en extrempunkt. Om nollstället är en extrempunkt, kan man bestämma om det är en minimi eller maximipunkt genom att kolla på derivatan f''_{xx}. Om det är en minimipunkt är derivatan positiv, om det är en maximipunkt är derivatan negativ.

MATLAB används för att ta fram Hessiandeterminant och f''_{xx} med hjälp av följande kod:

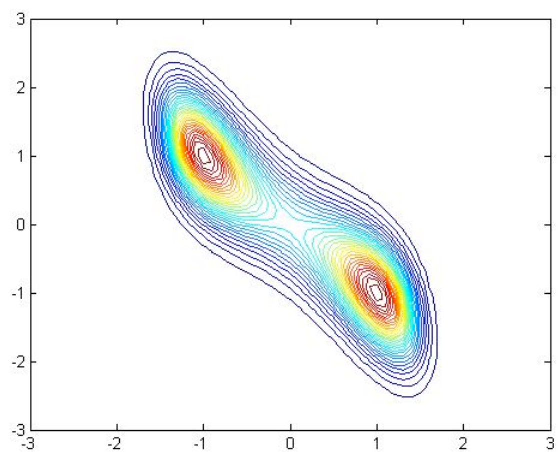
```
xcr = xcr(1:3); ycr = ycr(1:3);
for k = 1:3
    [xcr(k), ycr(k), subs(hessdetf, [x,y], [xcr(k), ycr(k)]), subs(fxx,
[x,y], [xcr(k), ycr(k)])]
end
```

Resultaten kan sammanfattas med tabellen nedan

x-koordinat	y-koordinat	Hessiandeterminanten	f''_{xx}	Typ av kritisk punkt
0	0	-16	0	Sadelpunkt
-1	1	$32e^2$	-12e	Maximipunkt
1	-1	$32e^2$	-12e	Maximipunkt

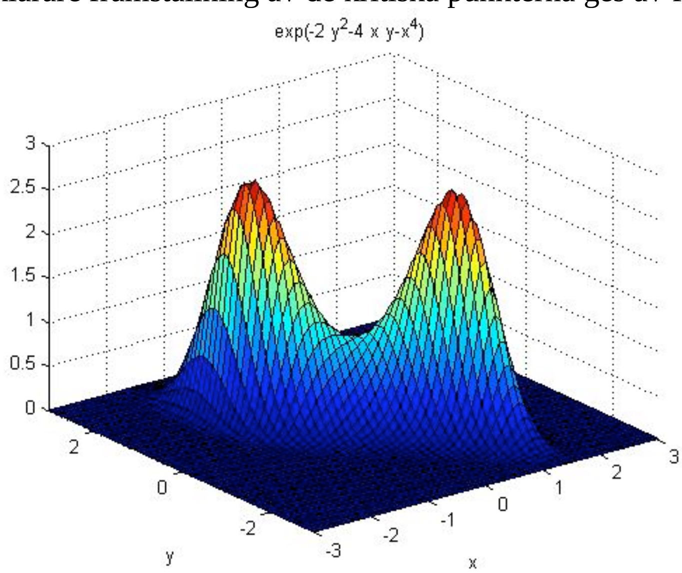
(1,-1), (-1,1) är extrempunkter, eftersom Hessiandeterminanten av båda är positiv. De är maximipunkter eftersom f''_{xx} av båda är negativa. Detta resultat verifieras med hjälp av figur 1.1.

(0,0) är en sadelpunkt, eftersom Hessiandeterminanten är negativ.



Figur 1.1: Graf av funktionen uppifrån

Från figur 1.1 kan man se att det finns två maximipunkter, och en sadelpunkt.
En klarare framställning av de kritiska punkterna ges av figur 1.2 nedan.



Figur 1.2: 3D framställning av funktion 1

Problem 2

Problem*:* Hitta alla kritiska punkter till h samt klassificera dem.

$h(x,y,z) = 3x^2 + 4y^2 + z^2 - 9xyz$

Lösning*:* Funktionen matas in genom följande kommandon. Kommandot syms används för att MATLAB ska tolka x och y som symboler och inte som variabler.

```
syms x y z
h=3*x^2+4*y^2+z^2-9*x*y*z
```

Därefter beräknas de första och andra partiella derivatorna. Först används kommandot jacobian för beräkna de första partiella derivatorna, därefter används samma kommando igen för att beräkna andra ordningens partiella derivator.

```
gradh=jacobian(h,[x,y,z])
```

```
hessmath=jacobian(gradh,[x,y,z])
```

Detta ger en Hessianmatris med följande utseende

[6, -9*z, -9*y]

[-9*z, 8, -9*x]

[-9*y, -9*x, 2]

Första ordningens derivator sätts lika med noll för att få fram kritiska punkter till funktionen. Detta görs genom följande kommandon.

```
[xcr2,ycr2,zcr2]=solve(gradh(1),gradh(2), gradh(3)); [xcr2,ycr2,zcr2]
```

Detta ger följande punkter

(0,0,0), (4/9, $\frac{2\sqrt{3}}{9}$, $\frac{4\sqrt{3}}{9}$), (-4/9, $\frac{2\sqrt{3}}{9}$, - $\frac{4\sqrt{3}}{9}$), (-4/9, - $\frac{2\sqrt{3}}{9}$, $\frac{4\sqrt{3}}{9}$) och

(4/9, - $\frac{2\sqrt{3}}{9}$, - $\frac{4\sqrt{3}}{9}$)

De kritiska punkterna undersöks genom att sätta in värdena i Hessianmatrisen. Fem punkter ger fem matriser. Därefter kan egenvärdena räknas ut, genom att använda kommandot eig i MATLAB.

Punkt	Egenvärden	Typ av punkt
(0,0,0)	6 8 2	Minimipunkt
(4/9, $\frac{2\sqrt{3}}{9}$, $\frac{4\sqrt{3}}{9}$)	14.0565 -4.3445 6.2880	Sadelpunkt
(-4/9, $\frac{2\sqrt{3}}{9}$, - $\frac{4\sqrt{3}}{9}$)	14.0565 -4.3445 6.2880	Sadelpunkt
(-4/9, - $\frac{2\sqrt{3}}{9}$, $\frac{4\sqrt{3}}{9}$)	14.0565 -4.3445 6.2880	Sadelpunkt
(4/9, - $\frac{2\sqrt{3}}{9}$, - $\frac{4\sqrt{3}}{9}$)	14.0565 -4.3445 6.2880	Sadelpunkt

Fyra av matriserna har samma egenvärden. Dessa egenvärden har alla två positiva tecken och en negativ vilket ger sadelpunkt. Den kritiska punkten i origo är en minimipunkt, eftersom alla egenvärdena har positiva tecken.

Problem 3

Problem*:* Hitta alla kritiska punkter till funktionen f och klassificera dem.

f (x,y)= $x^4 + y^4 + xy - x^2 - y^2$

Lösning*:* Funktionen matas in genom följande kommandon. Kommandot syms används för att MATLAB ska tolka x och y som symboler och inte som variabler.

```
syms x y
f=x^4+ y^4+x*y-x^2-y^2;
```

Därefter bestäms båda partiella derivatorna av första grad genom kommandot diff.

```
fx=diff(f,x)
fy=diff(f,y)
```

Första derivatorna sätts lika med noll för att få fram koordinaterna för kritiska punkterna. Detta görs genom att använda kommandot solve i MATLAB.

```
[xcr,ycr]=solve(fx,fy); [xcr,ycr]
```

Till denna funktion hittar MATLAB nio punkter. Alla punkter som hittas är reella. Vissa punkter upprepas dock flera gånger; till funktionen finns bara fem punkter som inte upprepas: (0,0), $(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$,$(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$, (-0.5,-0.5) och (0.5,0.5)

Sedan bestäms andraderivatorna genom att använda kommandot diff igen på första derivatan. Funktionen med två variabler har fyra derivator av andra grad, där två är lika.

```
fxx=diff(fx,x)
fxy=diff(fx,y)
fyy=diff(fy,y)
```

Hessiandeterminanten beräknas genom följande kod

```
hessdetf=fxx*fyy-fxy^2;
```

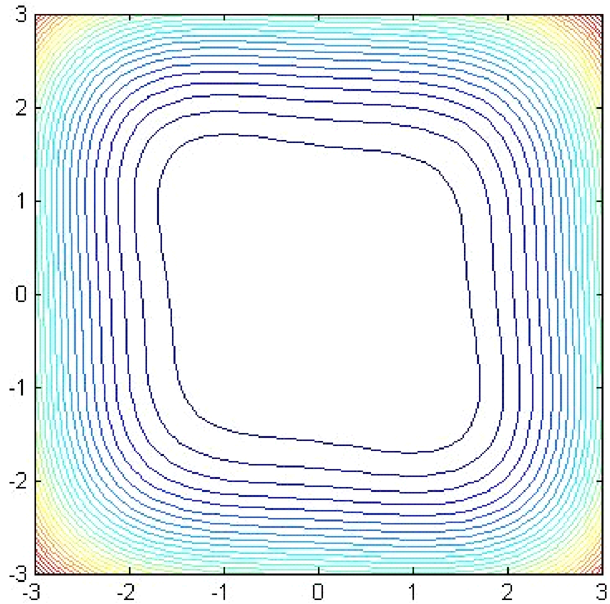
För att kunna avgöra vad de kritiska punkterna som MATLAB hittar har för karaktär sätts punktens koordinater in i koden för Hessiandeterminanten och andraderivatan med avseende på x. Alla nio värden skrivs ut av MATLAB med respektive x- och y-värden, genom att använda följande kommandorader.

```
xcr = xcr(1:9); ycr = ycr(1:9);
for k = 1:9
    [xcr(k), ycr(k), subs(hessdetf, [x,y], [xcr(k), ycr(k)]), subs(fxx,
[x,y], [xcr(k), ycr(k)])]
End
```

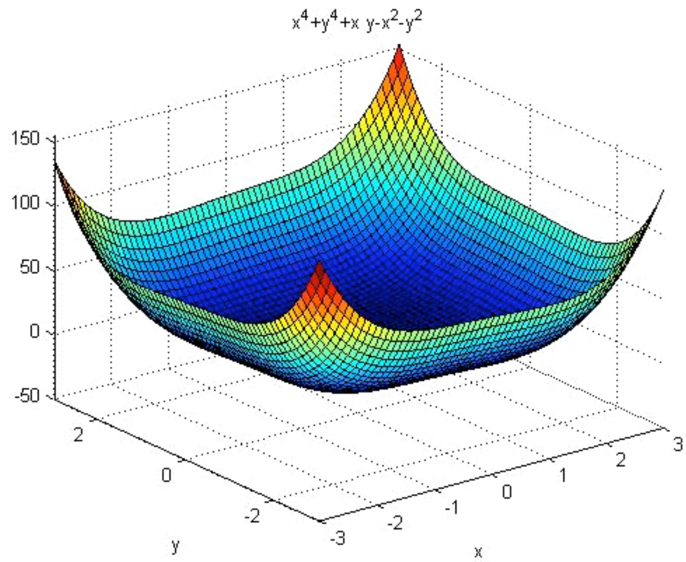
Då fås följande värden, sammanfattade i tabellen nedan:

x-koordinat	y-koordinat	Hessian-determinant	Andra derivatan f''_{xx}
0	0	3	-2
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	48	7
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	48	7
-0.5	-0.5	0	1
0.5	0.5	0	1

De första tre punkterna är extrempunkter, eftersom Hessiandeterminanten är positiv. (0,0) är en maximipunkt, eftersom f''_{xx} är negativ. $(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$ och $(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$, är minimipunkter, eftersom f''_{xx} är positiv i båda punkterna. (-0.5,-0.5) och (0.5,0.5) kan inte bestämmas genom att använda Hessiandeterminanten, eftersom den är noll.



Figur 3.1: Bild av funktionen uppifrån



Figur 3.2: ezsurf av funktionen

Figur 3.1 visar en extrempunkt i (0,0), som kan vara en maximipunkt. De resterande extrempunkterna syns inte i bilden. Men (0,0) är en maximipunkt, måste de resterande vara minimipunkter, eftersom funktionen i övrigt fortsätter att växa. Detta verifieras av våra beräkningar.

Problem 4

Problem: Finn och klassificera alla kritiska punkter till funktionen $f2(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 + xyz$.

Lösning: Funktionen matas in genom att använda följande kommandon

```
syms x y z
f2=x^4+y^4+z^4+x*y*z
```

Gradienten till funktionen beräknas med hjälp av kommandot jacobian i MATLAB.

```
gradf2=jacobian(f2,[x,y,z])
```

För att finna de kritiska punkterna till funktionen, sätts de första derivatorna lika med noll. MATLABs kommando solve används för att lösa ut de kritiska punkterna.

```
[xcr2,ycr2,zcr2]=solve(gradf2(1),gradf2(2),gradf2(3)); [xcr2,ycr2,zcr2]
```

MATLAB fick ut 17 kritiska punkter, var av fem är reella; (0,0,0), (-1/4,1/4,1/4), (-1/4,-1/4,-1/4), (1/4,-1/4,1/4) och (1/4,1/4,-1/4).

Hessianmatrisen fås genom att använda kommandot jacobian på gradienten.

```
hessmatf2=jacobian(gradf2,[x,y,z])
```

Då kan Hessianmatriserna till punkterna bestämmas.

```
H1=subs(hessmatf2,[x,y,z], [xcr2(1),ycr2(1),zcr2(1)])
H2=subs(hessmatf2,[x,y,z], [xcr2(2),ycr2(2),zcr2(2)])
H3=subs(hessmatf2,[x,y,z], [xcr2(3),ycr2(3),zcr2(3)])
H4=subs(hessmatf2,[x,y,z], [xcr2(6),ycr2(6),zcr2(6)])
H5=subs(hessmatf2,[x,y,z], [xcr2(7),ycr2(7),zcr2(7)])
```

Egenvärdena till Hessianmatrisern räknas ut genom att använda kommandot eig. För att få sifferärden används double.

```
double(eig(H1))
double(eig(H2))
double(eig(H3))
double(eig(H4))
double(eig(H5))
```

Punkt	Egenvärden	Typ av punkt

(0,0,0)	0 0 0	Okänd
(1/4,1/4,1/4)	0.2500 1.000 1.000	Minimipunkt
(-1/4,-1/4,-1/4)	0.2500 1.000 1.000	Minimipunkt
(1/4,-1/4,1/4)	0.2500 1.000 1.000	minimipunkt
(1/4,1/4,-1/4)	0.2500 1.000 1.000	minimipunkt

Punkten (0,0,0) har bara ett egenvärde, 0. Då kan inte egenvärdena användas för att bestämma punktens karaktär. De resterande punkterna hade alla samma egenvärden, 0.2500, 1.000 (och 1.000). Eftersom de alla är positiva, är de alla minimipunkter.

Karaktären av punkten (0,0,0) kan istället bestämmas genom att granska punkter som ligger nära origo. Om tecknen på punkterna nära origo skiftar, är det en sadelpunkt. Om alla är negativa, är det en maximipunkt. Om alla är positiva, är det en minimipunkt.

I MATLAB skrivs funktionen som

```
f = inline('x^4+y^4+x*y*z','x', 'y','z')
```

Funktionen provas med mycket små x, y och z värden med skiftande tecken.

```
f1=f(0.001,0.001,0.001)
f2=f(0.001,-0.001,0.001)
```

MATLAB returnerar

```
f1 = 1.0020e-009
f2 = -9.9800e-010
```

Eftersom tecknen för punkterna skiftar, är (0,0,0) en sadelpunkt.

Problem 5

Problem: Finn och klassificera alla kritiska punkterna till funktionen $k(x, y) = y^2 e^{x^2} - x - 3y$

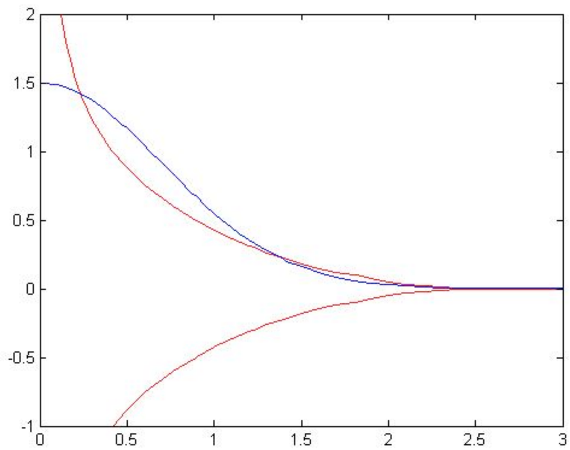
Lösning: De kritiska punkterna är svåra att hitta analytiskt, därför beräknas de kritiska punkterna numeriskt. Först beräknas derivatorna med avseende på x och y

```
kx=diff(k,x)
ky=diff(k,y)
```

$$\frac{\partial k}{\partial x} = 2xy^2 e^{x^2} - 1 \qquad\qquad \frac{\partial k}{\partial y} = 2ye^{x^2} - 3$$

Sedan plottas kurvorna där de med båda derivatorna $k_x^{'}$=0, och $k_y^{'} = 0$.

```
[x1,y1]=meshgrid(0:.1:3,-1:.1:2);
kxfun=inline(vectorize(kx)); kyfun=inline(vectorize(ky));
contour(x1,y1,kxfun(x1,y1),[0,0],'r'), hold on
contour(x1,y1,kyfun(x1,y1),[0,0],'b'), hold off
```



Figur 5.1: grafisk representation av $k_x^{'}$=0, och $k_y^{'} = 0$

De kritiska punkterna finns där de två kurvorna skär varandra. Ur figuren kan de två kritiska punkterna approximeras till (0.25,1.4) och (1.35,0.25). MATLABs newton2d funktion, som står skriven nedan, kan approximera punkterna mer exakt.

```
[xsol,ysol]=newton2d(kx, ky, 0.25, 1.4); [xsol,ysol]
[xsol,ysol]=newton2d(kx, ky, 1.35, 0.25); [xsol,ysol]
```

Punkterna bestämdes till (0.2348,1.4195) och (1.3406,0.2486). Hessiandeterminanten av funktionen beräknades för att bestämma punkternas karaktär.

```
hessdetk = simplify(diff(kx, x)*diff(ky, y) - diff(kx, y)^2)

double(subs(hessdetk, [x,y], [0.2348,1.4195]))
double(subs(hessdetk, [x,y], [1.3406,0.2486]))
```

Punkten (1.3406,0.2486), hade en negativ Hessiandeterminant, -23.3420, vilket betyder att det är en sadelpunkt.

Punkten (0.2348,1.4195) hade ett positivt Hessiandeterminant, 8.0072, vilket tyder på att det är en extrempunkt. Extrempunktens karaktär kan bestämmas genom att ta derivatan med avseende på x igen.

```
double(subs(diff(kx, x), [x,y], [0.2348,1.4195]))
```

$k''_{xx}(0.2348,1.4195) = 4.7279$. Eftersom detta är ett positivt tal, är punkten en minimipunkt. Den andra punkten, (1.3406,0.2486), hade en negativ Hessiandeterminant, vilket betyder att det är en sadelpunkt.

x-värde	y-värde	Hessiandeterminant	k''_{xx}	Typ av punkt
0.2348	1.4195	-23.3420	3.4259	Sadelpunkt
1.3406	0.2486	8.0072	4.7279	Minimipunkt

Problem 6

Problem: Finn och klassificera alla kritiska punkterna till funktionen
$f(x, y) = y^2e^{x^2} - x^2 - 3y$

Lösning: Det finns två tillgängliga metoder för att finna kritiska punkter. Antingen kan de beräknas analytiskt, eller numeriskt. Nedan beskrivs först den analytiska metoden, och sedan den numeriska.

Först deriveras funktionen med avseende på x och y. Kritiska punkter finns där båda derivatorna är lika med 0.

```
syms x y
f = y^2*exp(x) - x - 3*y;
fx=diff(f,x)
fy=diff(f,y)
```

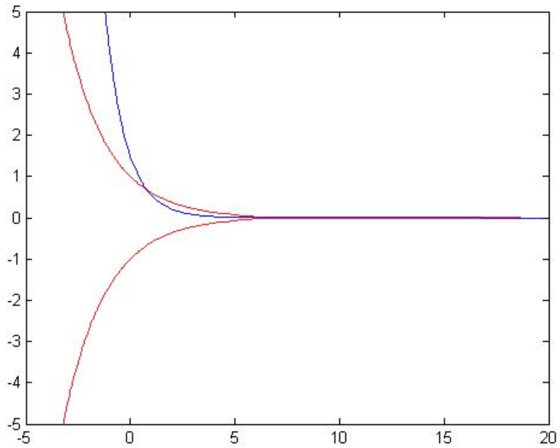
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2e^{x^2} - 2x = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2ye^{x^2} - 3 = 0$$

MATLABs solve funktion används för att finna nollställena.

```
[xcr,ycr]=solve(fx,fy); [xcr,ycr]
```

Funktionen har endast ett nollställe, (log(9/4), 2/3). För att bestämma dess karaktär används Hessiandeterminaten.

```
hessdetf = simplify(diff(fx, x)*diff(fy, y) - diff(fx, y)^2)
double(subs(hessdetf, [x,y], [0.8109,0.6667]))
```



Denna kritiska punkt har Hessiandeterminanten -4.5002, och är därför en sadelpunkt.

De kritiska punkterna kan även beräknas numeriskt. Först sätts derivatorna $f_x^{'}$, och $f_y^{'}$ lika med noll, sedan används en kurva av dem för att bestämma eventuella skärningspunkter, vilka är kritiska punkter.

Figur 6.1: grafisk representation av $f_x^{'}$ *=0, och* $f_y^{'}=0$

Denna funktion har bara en kritisk punkt, som först genom att titta på grafen approximeras till (0.8, 0.67). Sedan kan Newton2d-metoden användas för att göra approximationen mer exakt

```
[xsol,ysol]=newton2d(kx, ky, 0.8, 0.67); [xsol,ysol]
```

Då returnerar MATLAB punkten (0.8109,0.6667). Detta är samma nollställe som hittades analytiskt. Därför är resultaten tillförlitliga. Samma procedur som användes till att finna punktens karaktär analytiskt används för att finna punktens karaktär.

x-värde	y-värde	Hessiandeterminant	Typ av punkt	
log(9/4)	2/3	-4.5002	Sadelpunkt	