



KTH Matematik

**Tentamen i 5B1202/1 Differentialekvationer och transformeringar II, del 1**  
**Tisdagen den 13 april 2004 kl. 14.00–19.00**

*Tillåtna hjälpmedel:* Penna, linjal, radergummi, och "BETA, Mathematics Handbook".

*Instruktioner:* Tentamen består av 6 uppgifter. Varje fullständigt och korrekt löst uppgift ger 3 poäng. (För poäng krävs väl motiverade lösningar.) Eventuella bonuspoäng adderas. För godkänt krävs totalt minst 9 poäng. Preliminära betygsgränser: för betyg 3 krävs 9p, för betyg 4 krävs 13p och för betyg 5 krävs 16p.

*OBS!* Personnummer skall anges på försättsbladet. Endast en uppgift på varje blad. Numrera sidorna och skriv namn på varje blad!

---

1. (a) Lös differentialekvationen

$$3y^2y' + 16x = 2xy^3,$$

där  $y$  är en funktion av den oberoende variabeln  $x$ . (2p)

(b) Finn en lösning som är begränsad för  $x \rightarrow \infty$ . (1p)

2. (a) Avgör för det följande systemet av linjära differentialekvationer

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

vilken typ av kritisk punkt origo är. Ange om denna punkt är stabil eller instabil. (1p)

(b) Bestäm den kritiska punkten till

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

och skissera ett fasporträtt. (2p)

3. Funktionen  $y(x) = e^x$  är en lösning till differentialekvationen

$$xy'' - (2x + 1)y' + (x + 1)y = f(x)$$

då  $f(x) = 0$ . Lös differentialekvationen då  $f(x) = 3x^2e^x$ .

4. Lös för  $t > 0$  differentialekvationen

$$y'' + 3y' + 2y = \begin{cases} -1 & \text{för } t < 1 \\ 0 & \text{för } t \geq 1 \end{cases}$$

då  $y(0) = y'(0) = 1$ . (3p)

5. Bestäm alla kritiska punkter till det autonoma systemet

$$\begin{cases} x' = x(1 - y + x) \\ y' = -x - y \end{cases}$$

samt utred deras karaktär och stabilitetsegenskaper. Skissera också fasporträttet lokalt nära de kritiska punkterna. (3p)

6. Ekvationen

$$2xu''(x) + (2x + 1)u'(x) - 3u(x) = 0, \quad (x > 0)$$

har en icke-trivial lösning i form av en ändlig linjär kombination av potenser av  $x$ .  
Finn denna lösning. (3p)

*Lycka till!*