

Institutionen för matematik
KTH

TENTAMEN 5B1202, DEL II
DIFFERENTIALEKVATIONER OCH TRANSFORMER FÖR F2, T2 , (E)
3 POÄNG

Måndagen den 23 augusti, 2004, kl. 14.00-19.00

Hjälpmedel: Formelsamlingen BETA

Instruktioner: Tentamen består av 7 uppgifter, som ger totalt högst 36 poäng. Ange hur många poäng du fått tillgodoräknat under kursen (högst 4 poäng). För godkänt betyg (3) krävs 18 poäng, medan för betyg 4 krävs 25 poäng, och för betyg 5, 32 poäng. Lösningarna skall motiveras väl.

1. Definiera funktionen $f(t) = |t| + \cos^2 t$ för $-\pi \leq t \leq \pi$. Beräkna Fourierserien för f . Visa att serien konvergerar för alla t .

(5 p)

2. Finn en talföljd $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, så att $a_0 = 2$, $a_1 = 7$ och

$$a_{n+2} - 7a_{n+1} + 10a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

(5 p)

3. Bestäm det polynom $p(x)$ av högst andra graden som gör

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x^3 - p(x)|^2 e^{-x^2} dx$$

så liten som möjligt.

(5 p)

Var god vänd!

4. En funktion h är definierad för alla reella t genom

$$h(t) = \frac{\sin t}{t} e^{-|t|} \quad \text{för } t \neq 0$$

och $h(0) = 1$.

Beräkna Fouriertransformen av h .

(5 p)

5. Låt $f(t) = e^{-|t|}$ för $t \in \mathbb{R}$. Bestäm första och andra derivatan i distributionsmening av f .

(5 p)

6. Bestäm samtliga egenfunktioner och egenvärden till Sturm-Liouvilleproblemet

$$\begin{cases} f'' + \lambda f = 0, & 0 < x < \pi, \\ f(0) = f'(\pi) = 0. \end{cases}$$

Visa att motsvarande ortogonalsystem av egenfunktioner är fullständigt i $L^2(0, \pi)$.

(5 p)

7. Låt $f \in L^2(\mathbb{R})$ och sök en lösning till Dirichletproblemet

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0, & -\infty < x < \infty, & \quad 0 < y < a, \\ \begin{cases} u(x, 0) = 0, & -\infty < x < \infty \\ u(x, a) = f(x), & -\infty < x < \infty. \end{cases} \end{aligned}$$

Svaret får uttryckas i termer av Fouriertransformen $\hat{f}(\omega)$.

Visa också att

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x, y)|^2 dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx, \quad 0 < y < a.$$

(6 p)