

Matematiska Institutionen
KTH

**Tentamensskrivning på kursen Algebra och kombinatorik för F3, 5B1302, 25 maj 2000
klockan 08.00-13.00.**

Examinator: Olof Heden.

Tillåtna hjälpmedel: INGA HJÄLPMEDEL ÄR TILLÅTNA.

Gränser: 10 poäng ger betyget tre, 14 poäng ger betyget fyra och 18 poäng ger betyget fem.

Lösningarna måste, såvida inget annat anges, motiveras utförligt.

PROBLEM:

1. (2p) Ange samtliga heltal x sådana att $91x + 41 \equiv 18 \pmod{101}$.
2. Låt α beteckna permutationen $(1\ 3\ 4\ 2\ 5)$ och låt β beteckna permutationen $(1\ 3\ 4)(2\ 5)$.
 - a) (1p) Skriv permutationen $\alpha\beta$ som en produkt av disjunkta cykler.
 - b) (2p) Bestäm en permutation ψ sådan att $\psi\alpha = \beta$.
3. a) (1p) Hur många olika ord av längd 10 kan man bilda med hjälp av bokstäverna i ordet MORMORMOR? (Anm: Svaret skall ges i form av ett naturligt tal.)
 - b) (2p) Hur många blir antalet ord i uppgiften a) ovan om lägger till kravet att tre likadana bokstäver aldrig kommer precis efter varandra?
4. (3p) Låt G beteckna en bipartit graf med noderna $\{a, b, c, d, e, f\}$ respektive $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ och med kanterna $\{a2, b2, b4, c2, d1, d4, e3, e6, f4, f5\}$.
Låt M beteckna matchningen

$$M = \{b2, d4, e6, f5\}.$$

Konstruera en större matchning än matchningen M med hjälp av en alternerande stig (andra konstruktioner av större matchningar ger inga poäng) och visa med hjälp av satser från läroboken att den matchning du så konstruerat är en maximal matchning.
(Anm. Delpoäng erhålles för dels konstruktionen av den alternerande stigen och dels för konstruktionen av den större matchningen.)
5. (4p) Ett barn har en massa klossar av vilka han lägger ut 16 på en snurrskiva (typ karusell) så att de bildar en rektangel (anm. kvadrater är också rektanglar). Klossarna är antingen röda, blå eller gula och barnet har mer än 16 klossar av varje färg.
Hur många olika rektanglar kan han lägga ut om två rektanglar betraktas som lika om den ena kan snurras till den andra.

6. a) (1p) Visa att det irreducibla polynomet $p(x) = x^2 + x + 2$ är primitivt i ringen $Z_5[x]$.

b) (2p) Låt F beteckna den kropp med 25 element som på sedvanligt erhålles sätt när man räknar "modulo" det irreducibla polynomet $p(x) = x^2 + x + 2$ i ringen $Z_5[x]$. Avgör om polynomet $z^2 + xz + 1$ är irreducibelt i ringen $F[z]$.

7. (3p) Låt C vara en linjär 1-felsrättande binär kod av längd n och låt c vara ett ord som inte tillhör C men som ligger på ett avstånd av minst tre från varje kodord i C .

Finns det då alltid en linjär 1-felsrättande kod C' sådan att $c \in C'$ och $C \subset C'$?

(Ditt svar måste givetvis motiveras för att någon poäng skall kunna erhållas.)

8. (3p) Låt $\phi(k)$ beteckna Eulers ϕ -funktion och låt p vara ett primtal. Visa att för varje naturligt tal n gäller då att talet n delar $\phi(p^n - 1)$.