

Matematiska Institutionen
KTH

Några övningar till den 28 februari 2006 för Diskret matematik F3 F1spec.

1. Lös rekursionsekvationen

$$u_n = u_{n-1} - u_{n-2} + u_{n-3} \quad n = 3, 4, 5, \dots$$

med begynnelsevärdena $u_0 = 6$, $u_1 = 0$ och $u_2 = -6$.

2. Lös rekursionsekvationen

$$u_n = 2u_{n-1} - u_{n-2} + n^2 - n \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

med begynnelsevärdena $u_0 = 1$ och $u_1 = 2$.

3. Beskriv på något mer eller mindre explicit sätt den talföljd som definieras av rekursionsekvationen

$$u_n = n \cdot u_{n-1} + 1 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

och som har begynnelsevärdet $u_0 = 1$.

4. Två talföljder $(a_n)_0^\infty$ och $(b_n)_0^\infty$ definieras genom

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + b_{n-1} \\ b_n = a_{n-1} + b_{n-1} \end{cases} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

med begynnelsevärdena $a_0 = 1$ och $b_0 = 2$. Bestäm ett explicit uttryck för a_n respektive b_n .

5. Bestäm antalet ord av längd n som man kan bilda med hjälp av bokstäverna A, B, C och D och som innehåller ett jämnt antal A:n.
6. Bestäm antalet kvadratiska delbräden av ett schackbräde av storleken $n \times n$.
7. Kalle har n kronor. Varje dag under en följd av dagar tänker han köpa ett av följande godis
- en glasspinne för 2 kronor
 - kolor för 2 kronor
 - sega råttor för 1 krona.

På hur många olika sätt kan Kalle spendera sina pengar.

8. Visa följande formler för binomialkoefficienter

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n. \\ \text{(b)} \quad & \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0. \\ \text{(c)} \quad & \sum_{k=0}^n (-1)^k k \binom{n}{k} = 0. \end{aligned}$$

9. Visa att antalet udda permutationer på en mängd M är lika med antalet jämna permutationer på M .
10. Visa att för varje permutation φ på en mängd M gäller att ψ jämn om och endast om $\varphi^{-1}\psi\varphi$ är en jämn permutation.
11. Visa att varje jämn permutation kan skrivas som en produkt av 3-cykler.
12. Skriv $(1\ 2)(3\ 4)$ som en produkt av 3-cykler.
13. Korrigera uppgift 2) på föregående övningsblad.