

Matematiska Institutionen
KTH

Några övningar till den 28 mars 2006 för Diskret matematik F3 F1spec.

1. På hur många olika sätt kan hörnen i en tetraeder färgläggas om högst m färger får användas.
2. På hur många olika sätt kan kanterna i en kub färgläggas om högst m färger får användas.
3. Hur många olika karuseller kan man tillverka om man har hästar i a olika färger till förfogande och om karusellen skall bestå av n hästar i en rad om
 - (a) talet n är ett primtal.
 - (b) talet n är produkten av två olika primtal.
4. Låt $\mathcal{S}_n$ beteckna mängden av permutationer av en mängd med n element. Visa att varje ändlig grupp är isomorf med en delgrupp till $\mathcal{S}_n$.
5. Låt gruppen G verka på mängden S . Betrakta två banor

$$\mathcal{O}(a) = \{s \in S \mid g(a) = s \text{ för något } g \in G\} \quad \text{och} \quad \mathcal{O}(b) = \{s \in S \mid g(b) = s \text{ för något } g \in G\}$$

Visa, vilket vi glömde på föreläsningen, att

$$\mathcal{O}(a) \cap \mathcal{O}(b) \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad \mathcal{O}(a) = \mathcal{O}(b).$$

6. Visa att mängden

$$R = \{n + m\sqrt{-3} \mid n, m \in \mathbb{Z}\},$$

bildar en ring under operationerna

$$(n + m\sqrt{-3}) + (n' + m'\sqrt{-3}) = (n + n') + (m + m')\sqrt{-3}$$

och

$$(n + m\sqrt{-3})(n' + m'\sqrt{-3}) = (nn' - 3mm') + (nm' + n'm)\sqrt{-3}.$$

Visa att elementet 4 kan faktoriseras på två olika sätt

$$4 = ab = a'b'$$

där ingen av faktorerna är en enhet eller går att faktorisera ytterligare.

7. Bestäm alla irreducibla polynom av grad fyra i polynomringen $\mathbb{Z}_2[x]$.
8. Bestäm ett irreducibelt polynom av grad 3 i polynomringen $\mathbb{Z}_3[x]$.
9. Är polynomet $x^4 + 3x^3 + x + 1$ irreducibelt i $\mathbb{Z}_5[x]$.
10. Bestäm polynom $p(x)$ och $q(x)$ så att

$$p(x)(x^2 - 1) + q(x)(x^2 + 5x + 6) = 1.$$

Är detta möjligt att genomföra i ringen $\mathbb{Z}_2[x]$?