

LÖSNINGAR Algebra och kombinatorik för F3 22 augusti 2001

1. $E(3) \equiv_{65} 3^{17} = 48$. $D(48) \equiv_{65} 48^d$ där $de \equiv 1 \pmod{48}$. Euklides algoritmen ger $d = 17$.

2. a) $\chi = \phi\sigma\phi^{-1} = (1 \ 3 \ 4 \ 5)$.

b) $\sigma\phi = (1 \ 2 \ 4 \ 5 \ 3)$, en femcykel som har ordning 5.

c) $H = \langle (1 \ 2 \ 3)(4 \ 5) \rangle$ är en cyklisk grupp med sex element.

3. $\sum_{v \in V} \delta(v) = 2e$ och $\delta(v) = p$ ger att $p|V| = 2e$. Då p är ett primtal så gäller att $p \mid 2$ eller $p \mid e$.

4. Låt D beteckna derivering. Låt $T(x) = \sum_0^\infty x^n$. Då gäller att $\sum_0^\infty 2n^2 x^n = 2xDxD T(x)$. Då $T(x) = 1/(1-x)$ så får vi att

$$\sum_0^\infty 2n^2 x^n = 2xDxD \frac{1}{1-x} = 2x(1+x)/(1-x)^3.$$

5. Inga invertibla element kan ligga i ett maximalideal. Z_{12}/I , där I maximal ideal, är en kropp. Antal element q i en sådan kropp är en potens av ett primtal och $q \mid 12$. Detta ger att $|I| = 6, 4$ eller 3. Mängderna $\{2, 4, 6, 8, 10, 0\}$ och $\{3, 6, 9, 0\}$ och $\{0, 4, 8\}$ utgör de enda additiva delgrupperna till Z_{12} med 6, 4 resp 3 element. Den sista delmängden är dock inget maximalideal ty den är innehållen i den första. De två första är maximala.

b) En kropp innehåller ett identitets-element e med egenskapen $e \cdot e = e$, dvs $e(e-1) \equiv_{12} 0$. Enda sådana element är $e = 1$ och $e = 4$. Om elementet 1 ligger i kroppen ligger också alla summor $1 + 1 + \dots + 1$ i kroppen och vi får samtliga element i Z_{12} , men Z_{12} är ej en kropp. Däremot, elementen $\{0, 4, 8\}$ bildar som lätt verifieras en kropp med tre element.

6. Varje icke kodord ligger på avstånd ett från ett kodord. Inget ord med vikt två är ett kodord. Varje kodord med vikt tre ligger på avstånd ett från precis tre olika ord av vikt två. Detta ger att

$$(\text{antal kodord av vikt tre}) \cdot 3 = (\text{antal ord av vikt två}) = \binom{n}{2}.$$

SVAR: $\binom{n}{2}/3$.

b) Op 1. Välj ord av vikt tre på avståndet ett från ordet 1100000. Antal möjligheter är $n_1 = 5$.

Vi kan anta att det valda ordet är 11100000.

Op 2. Välj ord av vikt tre på avståndet ett från ordet 1001000 och minst avståndet tre från ordet 1110000. Antal möjligheter är $n_2 = 3$.

Vi kan anta att det valda ordet är 1001100. Koden innehåller då orden 0000000, 1110000, 1001100, 1000011, 1111111, 0001111, 0110011, 01111000.

Op 3. Återstår att välja ytterligare ett ord av vikt tre. Inget av ovanstående ord ligger på avståndet ett från ordet 0101000. Det finns två möjliga sådana ord, orden 0101010 och ordet 0101001. $n_3 = 2$.

De valda orden bildar nu 16 ord och multiplikationsprincipen ger nu SVAR: 30.

7. a) $I =$ (ord med konsekutiva I:n), osv. Svaret ges av $|I \cup T \cup L \cup E \cup N|$. Vi använder inklusion exklusion.

Då

$$|I| = \binom{10}{2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 1 \ 1} \quad |I \cap T| = \binom{9}{2 \ 2 \ 2 \ 1 \ 1 \ 1} \quad |I \cap T \cap L| = \binom{8}{2 \ 2 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1} \quad \text{osv}$$

så får vi

$$\text{SVAR:} \quad \binom{5}{1} \cdot \frac{10!}{16} - \binom{5}{2} \cdot \frac{9!}{8} + \binom{5}{3} \cdot \frac{8!}{4} - \binom{5}{4} \cdot \frac{7!}{2} + \binom{5}{5} \cdot \frac{6!}{1}$$

b) Många olika sätt finns. Vi väljer följande.

Svaret ges av $5 \cdot |I \setminus ((I \cap T) \cup (I \cap L) \cup (I \cap E) \cup (I \cap N))|$. Antalet element i mängden $((I \cap T) \cup (I \cap L) \cup (I \cap E) \cup (I \cap N))$ beräknas med hjälp av inklusion exklusion som ovan.