Institutionen för matematik, **KTH**
Skriven av Bengt Ek, Januari 2005
Modifierad av Svante Linusson, Januari 2006

Material till kursen 5B1204 Diskret matematik för D2:

Om plana och planära grafer

I många sammanhang (t.ex. vid konstruktion av elektriska kretsar) är det intressant att veta om en viss graf kan ritas i planet utan att några kanter korsar varandra (kanterna behöver inte ritas som räta linjer, andra (snälla) kurvor är tillåtna).

Definition: En **plan graf** är en ”konkret graf” i ett plan, där noderna är olika punkter i planet och kanterna är kurvor som förbinder sina noder, utan att olika kanter korsar varandra (annat än i noderna).

Definition: En graf $G = (V, E)$ är **planär** om den är isomorf med en plan graf.

G är alltså planär precis om den **kan** ritas (i ett plan) utan att några kanter korsar varandra. En graf kan mycket väl vara planär även om den är ritad med korsande kanter, huvudsaken är att det är möjligt att undvika korsningar.

Man kan förstås ställa sig frågan om en given graf går att rita utan korsande kanter på någon annan yta än ett plan. Om detta kan man läsa i litteraturen, vi noterar bara att det inte förändrar något om man betraktar en sfär i stället för ett plan:

En graf kan ritas utan korsande kanter **på en sfär** precis om den kan det **i ett plan**.

Om grafen är ritad i planet kan man nämligen ta en stor cirkel utanför grafen och ”dra ihop” den (men inte det som ligger innanför cirkeln) till en punkt. Detta ger en sfär med grafen ritad på sig. Omvänt kan en sfär med grafen ritad på sig ”öppnas” i en punkt som varken är en nod eller ligger på en kant. Detta ger en plan version av grafen.

Eulers polyederformel

Kanterna (och noderna) i en plan graf delar in planet i sammanhängande områden, vilka vi för enkelhets skull kommer att kalla *ytor*. (Andra använda termer är delytor, regioner och facetter.)
Om man ritar samma planära graf på olika sätt (som plana grafer) kan ytorna se olika ut. Följande sats, som är vårt huvudresultat, visar dock att **antalet** ytor är oberoende av hur grafen framställs som en plan graf.

Sats:
Om en plan graf har v noder, e kanter, r ytor och c komponenter, gäller

$$v - e + r - c = 1.$$

Om grafen är **sammanhängande** gäller speciellt (**Eulers polyederformel**)

$$v - e + r = 2.$$

Namnet polyederformel kommer av att Euler studerade konvexa polyedrar. De svarar (via projektion mot en punkt inuti) mot grafer på en sfär och därmed mot plana grafer. r är då antalet sidoytor hos polyedern. För en kub t.ex. får man $v - e + r = 8 - 12 + 6 = 2$, så det stämmer.

Bevis: Induktionsbevis, med induktion över e, antalet kanter.
Bas: Om $e = 0$ består grafen bara av v isolerade noder, det finns bara en yta, $r = 1$, och varje nod är en egen komponent, $c = v$, så $v - e + r - c = v - 0 + 1 - v = 1$. Basfallet är alltså klart.
Steg: Antag att påståendet stämmer för alla grafer med k kanter och betrakta en plan graf G med $e = k + 1$.
Bilda grafen G' genom att ta bort en kant ε (men inte någon nod) från G. Då har G och G' samma nod, så $v' = v$, och G' har en kant mindre än G, så $e' = e - 1 = k$. Enligt induktionsantagandet är $v' - e' + r' - c' = 1$.
Fall 1: Ytorna på ömse sidor om ε är samma yta, dvs det finns en kurva i planet som utan att korsa någon kant eller någon nod i G förbinder ε:s båda sidor. Komponenten i G som innehöll ε har då delats upp i två komponenter i G', men ytorna är lika många. Man har alltså $r' = r$ och $c' = c + 1$, så i detta fall fås $v - e + r - c = v' - (e' + 1) + r' - (c' - 1) = v' - e' + r' - c' = 1$, så påståendet gäller för G.
Fall 2: Ytorna på ömse sidor om ε är olika ytor, så de förenas till en när kanten tas bort, $r' = r - 1$. Om vi följer kanterna längs en av ytorna ”åt andra hållet” (bort från ε) får vi en stig som förbinder noderna i ε:s ändar. Eftersom vi inte är i fall 1, är detta en stig i G', så G' har lika många komponenter som G, $c' = c$. I detta fall fås alltså $v - e + r - c = v' - (e' + 1) + (r' + 1) - c' = v' - e' + r' - c' = 1$, så påståendet gäller åter för G.
Därmed är också induktionssteget klart och påståendet följer. $\square$

Som man kan se av beviset, gäller formeln i satsen för allmänna grafer (även med öglor och multipla kanter). Man kan till och med tillåta ”fria kanter” utan noder, dvs slutna kurvor (som komponenter räknas dock bara sammanhängande delar som innehåller minst en nod).

Följder av polyederformeln

Eulers polyederformel kan användas för att finna nödvändiga villkor för att en graf skall vara planär. Eftersom v och e (och c) är oberoende av hur vi ritar grafen, söker vi uttrycka villkoren i dem genom att eliminera r.
För en enkel plan graf (utan öglor och multipla kanter, dvs en sådan graf som vi sysslar med) gäller att varje yta måste ha minst tre kanter. (Med ett undantag, faktiskt. Om grafen bara innehåller en kant, som t.ex. K_2, har den enda ytan bara två kanter [som är samma räknad två gånger]. Vi kräver därför att $e \geq 2$.)

Följdsats 1:
För en planär graf med v noder, e kanter och c komponenter gäller om $e \geq 2$

$$3v \geq e + 3(c + 1).$$

Om grafen är **sammanhängande** gäller speciellt

$$3v \geq e + 6.$$

Likhet gäller precis om alla ytor (även den obegränsade ytan) har exakt tre kanter (för en och därmed alla plana versioner av grafen).

Bevis: Antag att vi är givna en viss inbäddning i planet av grafen. Låt $\delta(R)$ vara atalet kanter som begränsar ytan R. På samma sätt som i ”Handskakningslemmat”kan vi då visa att $\sum_R \delta(R) = 2e$, där summan går över alla ytor. Då varje yta har minst 3 begränsande kanter får vi $3r \leq 2e$ med likhet endast då $\delta(R) = 3$ för alla ytor R.

Vi får $r \leq \frac{2}{3}e$, så $1 = v - e + r - c \leq v - \frac{1}{3}e - c$, dvs $3v \geq e + 3(c+1)$. □

Exempel 1:
Grafen K_5 är sammanhängande och har $v = 5, e = 10$, så $3v = 15, e + 6 = 16$ och vi har visat: **Den fullständiga grafen K_5 är inte planär**.
Detsamma gäller för alla $K_n, n \geq 5$, vilka innehåller K_5 som en delgraf.

Följdsats 2:
För en bipartit, planär graf med v noder, e kanter och c komponenter gäller om $e \geq 2$

$$2v \geq e + 2(c + 1).$$

Om grafen är **sammanhängande** gäller speciellt

$$2v \geq e + 4.$$

Bevis: För en **bipartit** graf vet vi att alla cykler har jämn längd, så varje yta i en bipartit, enkel plan graf har minst fyra kanter (liksom nyss krävs $e \geq 2$). Så på samma sätt som ovan fås att $e \geq 2r$, dvs $r \leq \frac{1}{2}e$, så $1 = v - e + r - c \leq v - \frac{1}{2}e - c$, alltså $2v \geq e + 2(c + 1)$, och satsen följer. □

Exempel 2:
Grafen $K_{3,3}$ är sammanhängande och har $v = 6, e = 9$, så $2v = 12, e + 4 = 13$ och vi har visat: **Den fullständiga bipartita grafen $K_{3,3}$ är inte planär**.
Detsamma gäller för alla $K_{m,n}, m, n \geq 3$, som ju innehåller $K_{3,3}$ som en delgraf.

Exempel 3:
Ur följdsats 1 och handskakningslemmat får man $6v \geq 2e + 6(c+1) = \sum_{x \in V} \delta(x) + 6(c+1) > \sum_{x \in V} \delta(x)$. Eftersom $\frac{1}{v} \sum_{x \in V} \delta(x)$ är medelvärdet av nodernas valenser får vi att **för en planär (enkel) graf är medelvärdet av nodernas valenser** < 6. Speciellt finns det alltid **minst en nod av valens** ≤ 5.

Kuratowskis sats
Man kan visa en djup sats i grafteori som innebär att varje graf som inte är planär innehåller en delgraf som liknar (i en precis mening) $K_{3,3}$ eller K_5.

Regelbundna polyedrar

Vi skall se vilka möjligheter som finns för en sammanhängande, plan "dubbelt reguljär" graf. Med detta menar vi här att alla noder har samma valens, $n \geq 3$, (dvs grafen är n-reguljär) och alla ytor har samma antal, $m \geq 3$, kanter.
En **regelbunden polyeder** är en konvex polyeder med alla sidoytor regelbundna m-hörningar och alla hörn kongruenta. Det är sedan antiken känt att de enda regelbundna polyedrarna är de **platonska kropparna**, tetraedern, hexaedern (kuben), oktaedern, dodekaedern och ikosaedern. Den plana graf som svarar mot en regelbunden polyeder är "dubbelt reguljär" och vi skall se att de villkor för v, e, r, m, n som gäller för en plan graf räcker för att visa att de platonska värdena är de enda möjliga.

Som i förra avsnittet har man

$$v - e + r = 2, \qquad 2e = nv = mr.$$

Detta ger

$$2 = \tfrac{2e}{n} - e + \tfrac{2e}{m} = (2m - mn + 2n)\tfrac{e}{mn}$$

och det måste gälla att $2m - mn + 2n > 0$, vilket är detsamma som att

$$(m-2)(n-2) < 4.$$

Eftersom $m, n \geq 3$ blir de enda möjligheterna

m	n	v	e	r	platonsk kropp
3	3	4	6	4	tetraeder
3	4	6	12	8	oktaeder
3	5	12	30	20	ikosaeder
4	3	8	12	6	hexaeder (kub)
5	3	20	30	12	dodekaeder

v, e, r fås här från uttrycken ovan:

$$e = \frac{2mn}{4 - (m-2)(n-2)}, \; v = \frac{2e}{n}, \; r = \frac{2e}{m}.$$

Fyrfärgssatsen

En hypotes som länge var obevisad är att för varje karta (plan eller på en sfär) räcker det med fyra färger för (de sammanhängande) länderna, för att två länder som har en gemensam gräns alltid skall ha olika färger. Hypotesen formulerades redan 1852, blev spridd 1878 och bevisades (med stor användning av dator i beviset) först 1976.
När fyrfärgssatsen formuleras i grafteoretiska termer uttrycks den oftast inte för grafen som har gränserna som kanter och länderna som ytor, utan för den **duala grafen** med länderna som noder och kanter mellan länder som har en gemensam gräns. Då blir den:

Sats Om grafen G är planär är $\chi(G) \leq 4$.

Övningar

1. I en sammanhängande plan graf har alla noder valens 3 eller 5. Antalet noder är 12 och antalet ytor är 11. Hur många noder har valens 3 och hur många har valens 5?

2. I en 3-reguljär, plan, sammanhängande graf har alla ytor antingen 4 eller 6 kanter (också den obegränsade ytan). Hur många ytor har 4 kanter?

3. Rita en karta som kräver 4 färger för att intilliggande länder skall få olika färg.

Svar

1. 9 resp. 3
2. 6 st