(F1, on 18 jan 2006)

Linjär rekursionsekvation med konstanta koefficienter,

$$a_n + c_{k-1}a_{n-1} + \cdots + c_0 a_{n-k} = f(n) \quad n = k, k+1, \ldots$$

där $\{c_{k-1}, \ldots c_0\}$ är givna konstanter och $f(n)$ en given funktion.

Sökt är följden $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Homogen ekvation ($f(n) = 0$, alla n), allmän lösning:

$$a_n = P_1(n){r_1}^n + \cdots + P_j(n){r_j}^n$$

$r_1, \ldots, r_j$ de **olika** rötterna till **karakteristiska ekvationen**

$$x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \cdots + c_0 = 0$$

med multipliciteter $m_1, \ldots, m_j$,
$P_i(n)$ godtyckliga polynom av grad $\leq m_i - 1$, $i = 1, \ldots, j$.

Inhomogen ekvation

$$a_n = a_n^{\text{hom}} + a_n^{\text{part}},$$

a_n^{hom}: den allmänna lösningen till den homogena ekvationen enligt ovan
a_n^{part}: en lösning till den inhomogena ekvationen, den fås ofta med hjälp av en **ansats**.

"Mästarsatsen" Låt a, b, d vara givna konstanter.

Om
$$\begin{cases} T(n) &= aT(\frac{n}{b}) + F(n) \\ T(1) &= d \end{cases}$$
så

1) om $F(n)$ växer långsammare än $n^{\log_b a}$:

$$T(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$$

2) om $F(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$:

$$T(n) \in \Theta(n^{\log_b a} \log n)$$

3) om $F(n)$ växer snabbare än $n^{\log_b a}$:

$$T(n) \in \Theta(F(n))$$

[$f(n) \in \Theta(g(n))$ (då $n \to \infty$) betyder att f och g "växer lika snabbt", dvs:
Det finns $N, A, B > 0$ så att $A|g(n)| < |f(n)| < B|g(n)|$, för alla $n > N$,
dvs att $f(n)$ är $\mathcal{O}(g(n))$ och $g(n)$ är $\mathcal{O}(f(n))$.]