(F17, må 13 mar 2006)

(Nedan är alla funktioner **aritmetiska**, dvs funktioner : $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$.
Symbolen $\sum_{d|n}$ betecknar summation över alla **positiva** delare d till n.)

Eulers ϕ-funktion: $\phi(n) = |\{x \in \mathbb{N}_n; sgd(x,n) = 1\}|$

Sats: Om $n = p_1^{e_1} \dots p_r^{e_r}$ ($p_1, \dots, p_r$ olika primtal, alla $e_i \geq 1$):

$$\phi(n) = n(1 - \tfrac{1}{p_1}) \dots (1 - \tfrac{1}{p_r})$$

ϕ är **multiplikativ**, dvs $sgd(m,n) = 1 \Rightarrow \phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$

Sats: $\sum_{d|n} \phi(d) = n$

Möbiusfunktionen $\mu = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & y^2|n, \text{ något } y \geq 2 \\ (-1)^r & n = p_1 p_2 \dots p_r, \text{ olika primtal} \end{cases}$

Sats: $\sum_{d|n} \mu(d) = \delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & n > 1 \end{cases}$

Möbius inversionsformel:

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d) \iff g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f(\tfrac{n}{d})$$

speciellt: $\phi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d}$

Faltningen $f * g$ av f och g:

$$(f * g)(n) = \sum_{d_1 d_2 = n} f(d_1) g(d_2) = \sum_{d|n} f(d) g(\tfrac{n}{d})$$

Det gäller för alla f, g, h

$f * g = g * f$
$(f * g) * h = f * (g * h)$
f, g multiplikativa $\Rightarrow f * g$ multiplikativ

Resultat ovan kan uttryckas

$1 * \phi = id$	där
$1 * \mu = \delta$	$1(n) = 1$
$\delta * f = f$	$id(n) = n$

Möbius inversionsformel tar formen

$$f = 1 * g \iff g = \mu * f$$

speciellt: $\phi = \mu * id$