MATEMATISKA INSTITUTIONEN
KTH
Examinator: Svante Linusson
telefon 790 9444

Svar på övningstentamen i Diskret Matematik 5B1204, VT06

Varje rätt löst uppgift är värd 3 poäng. Max är 27 poäng och 13 räcker säkert för godkänt. Möjlighet att kompetera får den som har 12 poäng.
Godkänt på lappskrivningarna 1-3 ger en bonuspoäng per styck.
Hjälpmedel: Inga hjälpmedel tillåtna.
Motivera dina lösningar!!!

1. Formulera och bevisa Halls sats.

   Svar: Bokens bevis eller det bevis som jag gav på föreläsningen.

2. I kursen definieras $\binom{n}{k}$ som antalet sätt att välja ut en delmängd med k element från en mängd med n element. Visa direkt från definitionen av $\binom{n}{k}$ den grundläggande rekursionen med startvärden.

   Svar: Se boken. (jag gav samma bevis på föreläsningen)

3. Ge en exakt formel för a_n som ges rekursivt av

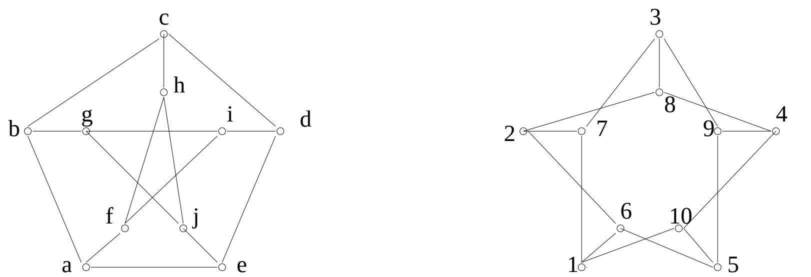
   $$a_n - 3a_{n-1} - 10a_{n-2} = 0,$$

   med startvärden $a_0 = 3, a_1 = 8$.

   Svar: Detta är en enkel rutinuppgift. Den karakteristiska ekvationen $x^2 - 3x - 10 = 0$ har lösningar $x = -2, 5$. Den allmänna lösningen är då $a_n = A(-2)^n + B5^n$. Insättning av startvärdena ger ekvationssystemet $A+B = 3, 5B-2A = 8$, vilket ger $A = 1, B = 2$. Lösningen är således $a_n = (-2)^n + 2\cdot 5^n$.

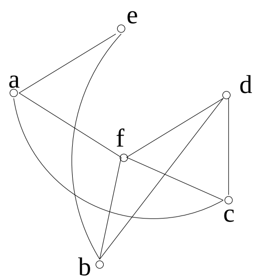
4. Vilka av följande par av grafer är isomorfa? Svara med isomorfi eller egenskap som skiljer graferna åt.

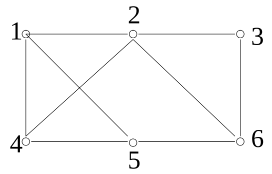
   (a)



   (b)

(c)





Svar:

(a) Inte isomorfa, ty den vänstra grafen har inga cykler kortare än 5 medans den högra grafen har cykler av längd 4, t.ex. 3,9,4,8. Man kan också visa att den högra grafen är bipartit med noduppdelning $\{1,2,3,4,5\}$, $\{6,7,8,9,10\}$ medans den vänstra grafen har cykler av udda längd, t.ex. a,b,c,d,e och alltså inte är bipartit.

(b) Isomorfa, med isomorfi, t.ex. $\alpha(a) = 2, \alpha(b) = 3, \alpha(c) = 6, \alpha(d) = 1, \alpha(e) = 4, \alpha(f) = 5$

(c) Inte isomorfa. Båda graferna har nodsekvens 2,3,3,3,3,4. Om det finns en isomorfi så måste noden med valens 2 (e) avbildas på 3 som också har valens 2 och noden med valens 4 (f) måste avbildas på 2 som har valens 4. Men $\{e, f\}$ är inte en kant i vänstra grafen medan $\{2, 3\}$ är en kant i högra grafen. En isomorfi kan således inte existera.

5. Beräkna $\phi(300)$.

Svar: En sats ger att om $n = p_1^{e_1} \dots p_k^{e_k}$ är primfaktoriseringen av n så är $\phi(n) = n(1 - 1/p_1)(1 - 1/p_2) \dots (1 - 1/p_k)$. Notera att $300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$ och formeln ger $\phi(300) = 300 \cdot 1/2 \cdot 2/3 \cdot 4/5 = 80$.

6. Hur många ord kan man skriva av bokstäverna i GULDMEDALJ som har

(a) 10 bokstäver? (1 poäng)

(b) 3 bokstäver? (2 poäng)

Svar:

(a) Detta är multinomialkoefficienten $\binom{10}{1,1,1,1,1,1,2,2}$.

(b) Här finns ingen enkel formel utan vi måste dela in i tre disjunkta fall som täcker alla möjligheter. Fall 1. Ingen bokstav förekommer mer än en gång. Då har vi 8 olika bokstäver att välja mellan och vi kan välja första bokstaven i 0rdet på 8 sätt, andra på 7 sätt och tredje på 6 sätt. Totalt $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ ord.
Fall 2. Bokstaven L förekommer 2 gånger. Välj de två platserna för L:en på $\binom{3}{2}$ sätt. Sedan kan vi placera in någon av de övriga 7 bokstäverna på den tredje platsen. Totalt $3 \cdot 7 = 21$ ord. Fall 3. Bokstaven D förekommer 2 gånger. (Observera att Fall 2 och Fall 3 inte kan ske samtidigt. På samma sätt som i Fall 2 får vi 21 ord. Totalt $336 + 21 + 21 = 378$ ord.

7. Låt $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ och $B = \{x, y, z\}$. Definiera en relation $\mathcal{R}$ på mängden av funktioner från A till B genom att $f\mathcal{R}g$ om $f(1) = g(1)$.

(a) Visa att $\mathcal{R}$ är en ekvivalensrelation.

(b) Hur många funktioner finns i en ekvivalensklass?

(c) Om relationen istället definieras som $f\mathcal{R}g$ om $f(1) = g(2)$. Är det fortfarande en ekvivalensrelation?

Svar:

(a) $\mathcal{R}$ reflexiv: $f\mathcal{R}f$ ty $f(1) = f(1)$
$\mathcal{R}$ symmetrisk: $f\mathcal{R}g \implies f(1) = g(1) \implies g(1) = f(1) \implies g\mathcal{R}f$
$\mathcal{R}$ transitiv: $f\mathcal{R}g, g\mathcal{R}h \implies f(1) = g(1) = h(1) \implies f\mathcal{R}h$

(b) Alla funktioner med samma bild för 1 ligger i samma ekvivalensklass så bilden av $2, 3, 4, 5$ kan väljas fritt bland x, y, z. Alltså 3^4 funktioner.

(c) Nej, relationen är vare sig reflexiv, symmetrisk eller transitiv! Motexempel är till exempel en funktion $f(1) = x \neq y = f(2)$, så $\mathcal{R}$ är inte reflexiv.

8. Visa att $12^{n+2} + 13^{2n+1} \equiv_{157} 0$ för alla heltal $n \geq 0$.

   Svar: Vi använder att $13^2 = 169 \equiv_{157} 12$, vilket ger: $12^{n+2} + 13^{2n+1} = 12^{n+2} + 169^n \cdot 13 \equiv_{157} 12^{n+2} + 12^n \cdot 13 = 12^n(12^2 + 13) = 12^n \cdot 157 \equiv_{157} 0$.

9. Systemansvariga Susanne gjorde backup totalt 30 gånger under en period av 21 dagar. Hon gjorde back-up minst en gång varje dag. Visa att det finns en följd av dagar sådan att antalet backuper under dessa dagar var exakt 10.

   Svar: Låt b_i vara antalet backuper hon har gjort totalt under de första i dagarna. Låt $c_i = b_i + 10$. Vi har då att $1 \leq b_1 < b_2 < \cdots < b_{21} = 30$ och $11 \leq c_1 < c_2 < \cdots < c_{21} = 40$.De 42 talen $b_1, \ldots, b_{21}, c_1, \ldots, c_{21}$ ligger alltås alla mellan 1 och 40. Duvslagsprincipen (även kallad postfacksprincipen) ger då att det finns två tal som är lika. Då $b_i \neq b_j$ och $c_i \neq c_j$ för alla $1 \leq i < j \leq 21$ så måste $b_j = c_i$ för några $i < j$. Det betyder att $b_j - b_i = 10$ och under dagarna $i + 1, i + 2, \ldots, j$ gjordes exakt 10 backuper.

Lycka Till!

Svante