

Kontrollskrivning, 2002-09-20, kl. 14.15–16.00.

5B1210 Matematik IV, för M och B.

Kontrollskrivning 1!

1. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D (x^2 + y^2)^{-1/2} dx dy,$$

om D är cirkelskivan som definieras av $x^2 + y^2 \leq 9$.

(5)

Vi kör polära koordinater:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad dx dy = r dr d\theta.$$

Då ges cirkelskivan D av olikheterna

$$0 \leq r \leq 3, \quad 0 \leq \theta < 2\pi,$$

vilka beskriver en rektangel D' i (r, θ) -planet, och dessutom gäller att

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Vi får således

$$\iint_D (x^2 + y^2)^{-1/2} dx dy = \iint_{D'} r^{-1} r dr d\theta = \iint_{D'} dr d\theta,$$

vilket representerar arean av rektangeln D' , dvs $3 \times 2\pi = 6\pi$. Detta är alltså svaret.

2. Beräkna linjeintegralen

$$\int_{\Gamma} x^2 y dx + xy^2 dy$$

om Γ är kurvan som förbinder punkten $(0, 0)$ med punkten $(2, 4)$ längs med parabeln $y = x^2$.

(5)

Vi parametriserar kurvan Γ :

$$x = t, \quad y = t^2, \quad 0 \leq t \leq 2.$$

Då blir

$$dx = dt, \quad dy = 2t dt,$$

och stoppar vi in detta i linjeintegraler erhåller vi

$$\int_{\Gamma} x^2 y dx + xy^2 dy = \int_0^2 (t^4 dt + t^5 2t dt) = \int_0^2 (t^4 + 2t^6) dt = \left[\frac{t^5}{5} + \frac{2t^7}{7} \right]_0^2 = \frac{1504}{35},$$

vilket utgör svaret.

3. Beräkna ytintegralen

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma,$$

där $d\sigma$ står för ytelementet på ytan Σ . Här är \mathbf{F} vektorfältet

$$\mathbf{F} = (3x, 4y, 5z),$$

och Σ randytan till den kropp som ges av att olikheterna

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \quad z \geq 0.$$

Normalen \mathbf{n} är den enhetsnormal mot ytan som riktas utåt.

(5)

Eftersom ytan utgör randytan till en kropp är den sluten. Därför kan vi tillämpa Gauss sats (divergenssatsen), för att erhålla

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iiint_K \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx dy dz,$$

om K betecknar kroppen som innesluts av Σ . Vi räknar på:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(3x) + \frac{\partial}{\partial y}(4y) + \frac{\partial}{\partial z}(5z) = 3 + 4 + 5 = 12.$$

Detta betyder att svaret kommer att ges av talet 12 gånger kroppen K 's volym. Volymen av en sfär med radie R ges av formeln

$$\frac{4\pi}{3} R^3,$$

men i vårt fall har vi en halvsfär med radie $\sqrt{4} = 2$, så vi får volymen

$$\frac{1}{2} \frac{4\pi}{3} 2^3 = \frac{16\pi}{3}.$$

Svaret blir således $12 \times \frac{16\pi}{3} = 64\pi$.