Institutionen för matematik
KTH

Kontrollskrivning, 2003-09-11, kl. 13.15–15.00.

5B1210 Matematik IV, för M och B.

Kontrollskrivning 1!

1. (MODUL 1) Låt D beteckna området

$$D = \{(x, y) : 1 < x^2 + y^2 < 4, \; |y| < x\}.$$

Beräkna integralen

$$\int\int_D \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \, dxdy.$$

Vi nyttjar polära koordinater:

$$x = r \cos\theta, \qquad y = r \sin\theta.$$

Motsvarande område i (r, θ)-planet blir

$$D' = \left\{(r, \theta) : \; 1 < r < 2, \; -\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}\right\}.$$

Vid substitutionen nyttjas att

$$dxdy = r \, drd\theta,$$

samt att

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Vi finner alltså att

$$\int\int_D \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \, dxdy = \int\int_{D'} \frac{r\cos\theta}{r} \, r \, drd\theta = \int\int_{D'} r\cos\theta drd\theta.$$

Den högra integralen beräknas rättframt:

$$\int\int_{D'} r\cos\theta drd\theta = \int_1^2 r \, dr \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos\theta d\theta = \left[\frac{r^2}{2}\right]_1^2 \left[\sin\theta\right]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Detta är alltså svaret.

2. (MODUL 2) Låt Γ beteckna kurvan i planet med startpunkt i $(1,0)$ och slutpunkt $(0,2)$, vilken går längs enhetscirkeln $x^2+y^2=1$ från $(1,0)$ till $(0,1)$ [kortaste vägen], och längs med en rät linje från $(0,1)$ till $(0,2)$. Rita först upp kurvan Γ, med riktningen indikerad. Beräkna sedan kurvintegralen

$$\int_\Gamma (2+y)\,dx + (1+2x)\,dy.$$

Vi delar upp Γ i två delar; vägen längs med cirkeln Γ_1 och vägen längs med linjesegmentet Γ_2. Av tekniska skäl avstår vi här från att försöka rita upp kurvan Γ.

Γ_1 parametriseras enligt

$$x=\cos t, \qquad y=\sin t, \qquad 0\le t\le \frac{\pi}{2},$$

varvid vi har

$$dx=-\sin t dt, \qquad dy=\cos t dt.$$

Vi finner således att

$$\int_{\Gamma_1} (2+y)\,dx + (1+2x)\,dy = \int_0^{\pi/2} (2+\sin t)(-\sin t)dt + (1+2\cos t)\ \cos t\,dt.$$

Detta förenklar vi till

$$\int_0^{\pi/2} \big(-2\sin t - \sin^2 t + \cos t + 2\cos^2 t\big)dt,$$

Vi nyttjar nu att

$$\sin^2 t = \frac{1}{2}\big(1-\cos(2t)\big), \qquad \cos^2 t = \frac{1}{2}\big(1+\cos(2t)\big),$$

för att finna en primitiv funktion och lösa ovanstående integration. Slutresultatet blir

$$\int_0^{\pi/2} \big(-2\sin t - \sin^2 t + \cos t + 2\cos^2 t\big)\,dt = \frac{\pi}{4}-1.$$

Γ_2 parametriseras med y, eller mer precist,

$$x=0, \qquad y=t.$$

Vi kan då låta parametervariabeln kallas y, och observerar att $dx=0$. Alltså blir

$$\int_{\Gamma_2} (2+y)\,dx + (1+2x)\,dy = \int_1^2 dy = 1.$$

Svaret blir alltså:

$$\int_\Gamma (2+y)\,dx + (1+2x)\,dy$$
$$= \int_{\Gamma_1} (2+y)\,dx + (1+2x)\,dy + \int_{\Gamma_2} (2+y)\,dx + (1+2x)\,dy = \frac{\pi}{4}-1+1=\frac{\pi}{4}.$$