Institutionen för matematik
KTH

Kontrollskrivning, 2004-09-16, kl. 13.15–14.15.

5B1206 Differentialekvationer I, för BDM.

Kontrollskrivning 1!

1. (MODUL 1) Lös differentialekvationen

$$\frac{dy}{dx} = \alpha\, y^2 \,\cos x,$$

där α är en reell parameter (dvs konstant). Av vilken ordning är differentialekvationen? Är den linjär? Finn även den lösning som uppfyller begynnelsevillkoret $y(0) = 1$, samt förklara var denna är definierad (detta kommer troligtvis att bero på α).

Ekvationen är olinjär och av ordning 1.

Vi observerar att ekvationen är variabelseparerad, och vi skriver först om den på formen

$$\frac{dy}{y^2} = \alpha\, y^2 \,\cos x \, dx.$$

Nästa steg är att integrera båda sidor, och vi skriver symboliskt

$$\int \frac{dy}{y^2} = \alpha \int \cos x \, dx.$$

Vi finner alltså

$$\frac{1}{y} = -\alpha \sin x + C,$$

där C är en konstant. fortsatt reduktion ger

$$y = \frac{1}{C - \alpha \sin x}$$

som allmän lösning. Om nu $y(0) = 1$ förutsätts som begynnelsedata, blir $C = 1$, och alltså

$$y = \frac{1}{1 - \alpha \sin x}.$$

Denna blir definierad på hela reella linjen om $-1 < \alpha < 1$. Om $|\alpha| \geq 1$ istället, har vi de två rötterna till ekvationen

$$\sin x = \frac{1}{\alpha},$$

vilka är närmast $x = 0$; vi skriver $x_1(\alpha)$ och $x_2(\alpha)$ för dessa, och väljer $x_1(\alpha)$ negativt medan $x_2(\alpha)$ är positivt. Då blir intervallet $x_1(\alpha) < x < x_2(\alpha)$ definitionsintervallet för lösningen. Detta beror på att lösningen inte kan fortsättas förbi de singulariteter vi får i ändpunkterna.