Institutionen för matematik
KTH

Kontrollskrivning, 2004-10-26, kl. 10.15–12.00.
5B1206 Differentialekvationer I, för BDM.

Kontrollskrivning 2!

1. (MODUL 2) En viktig differentialekvation i matematisk fysik är ekvationen

$$(1-t^2)\frac{d^2y}{dt^2} - 2t\,\frac{dy}{dt} + 2\,y = 0, \qquad (-1 < t < 1).$$

En lösning till denna ekvation är funktionen

$$y_1(t) = t.$$

Kolla att detta verkligen är en lösning. Finn därefter ytterligare en lösning till ekvationen, som är linjärt oberoende av y_1.

Ekvationen är linjär av andra ordningen, och dessutom homogen. Därför kommer lösningsrummet att vara linjärt, och dessutom två-dimensionellt.

Vi kollar först att y_1 är en lösning:

$$y_1(t) = t, \quad y_1'(t) = 1, \quad y_1''(t) = 0.$$

Detta stoppas in i ekvationen, och vänster led blir då

$$(1-t^2)y_1''(t) - 2t\,y_1'(t) + 2\,y_1(t) = 0 - 2t + 2t = 0.$$

Vi har alltså en lösning.

För att hitta ytterligare en lösning använder vi metoden som kallas *reduktion av ord-*

ning. Vi sätter $y_2 = y_1 u$, och räknar på:

$$y_2(t) = t\,u(t), \quad y_2'(t) = u(t) + t\,u'(t), \quad y_2''(t) = 2\,u'(t) + t\,u''(t).$$

Detta stoppas in i ekvationen, och vi får

$$(1-t^2)\,y_2''(t) - 2t\,y_2'(t) + 2\,y_2(t) = t(1-t^2)\,u''(t) + (2-4t^2)\,u'(t) = 0.$$

Vi skriver om detta som

$$\frac{u''(t)}{u'(t)} = -\frac{2-4t^2}{t(1-t^2)} = -\frac{2}{t} + \frac{2t}{1-t^2}.$$

Vänster sida är derivatan av $\ln u'$, så efter integration får vi

$$\ln u'(t) = -2\ln|t| - \ln|1-t^2| + C.$$

Vi väljer $C = 0$, och ser att på intervallet $-1 < t < 1$ blir det

$$u'(t) = \frac{1}{t^2(1-t^2)} = \frac{1}{t^2} + \frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{t^2} + \frac{1}{2(1-t)} + \frac{1}{2(1+t)}.$$

Vi integrerar:

$$u(t) = -\frac{1}{t} - \frac{1}{2}\ln(1-t) + \frac{1}{2}\ln(1+t) + C_2 = -\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t} + C_2.$$

Vi är fria att välja $C_2 = 0$, och så:

$$y_2(t) = t\,u(t) = -1 + \frac{t}{2}\ln\frac{1+t}{1-t}.$$

Den allmänna lösningen till differentialekvationen kommer således att ges av

$$y(t) = A\,y_1(t) + B\,y_2(t),$$

för två (fria) värden på parametrarna A och B.