Institutionen för matematik
KTH

Kontrollskrivning, 2004-11-01, kl. 08.15–10.00.

5B1206 Differentialekvationer I, för BDM.

Kontrollskrivning MODUL 4

1. (MODUL 4) Betrakta systemet

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + 5 \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + \beta\, y - 1. \end{cases}$$

Finn de kritiska punkterna för systemet (i termer av parametern β). Lös ekvationen explicit. Rita sedan fasdiagram som beskriver hur systemet beter nära den kritiska punkten (eller de kritiska punkterna), och inkludera en stabilitetsanalys.

Vi börjar med de kritiska punkterna, och löser

$$\begin{cases} y + 5 = 0 \\ 2x + \beta\, y - 1 = 0. \end{cases}$$

Detta har lösningen

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{2}\beta \\ y = -5, \end{cases}$$

så att vi får en enda kritisk punkt $(\frac{1}{2} + \frac{5}{2}\beta, -5)$. Vi skriver systemet på vektorform:

$$X' = AX + B,$$

där

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & \beta \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Eftersom vektorn B är konstant, kan vi välja som partikulärlösning den kritiska punkten:

$$X_p = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{2}\beta \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Den allmänna homogena lösningen får vi genom att först lösa den karakteristiska ekvationen

$$\det(A - \lambda I) = 0;$$

rötterna till denna är

$$\lambda_1 = \frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + 2}, \qquad \lambda_2 = \frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + 2}.$$

Vi har motsvarande egenvektorer

$$K_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}, \qquad K_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Detta ger den allmänna homogena lösningen

$$X_h = c_1\, K_1\, e^{\lambda_1 t} + c_2\, K_2\, e^{\lambda_2 t},$$

där c_1, c_2 är två godtyckliga reella parametrar. Den allmänna lösningen till vårt inhomogena problem är således

$$X = X_p + X_h = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{5}{2}\,\beta \\ -5 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} e^{\lambda_2 t}.$$

Oavsett värdet på β är λ_1 positivt, medan λ_2 är negativt. Detta innebär att fasdiagrammet är en sadelpunkt runt den kritiska punkten $(\frac{1}{2} + \frac{5}{2}\,\beta, -5)$.