Institutionen för matematik
KTH

Kontrollskrivning, 2004-11-01, kl. 08.15–10.00.

5B1206 Differentialekvationer I, för BDM.

Kontrollskrivning MODUL 5

1. (MODUL 5) Beräkna Fourierserien till funktionen

$$f(t) = \begin{cases} -\sin t, & -\pi < t < 0, \\ \cos t, & 0 < t < \pi. \end{cases}$$

Rita sedan grafen till Fourierserien på intervallet $[-2\pi, 4\pi]$.

Det är implicit i uppgiften att vi jobbar med perioden $T = 2\pi$. Då är Fourierserien på formen

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt),$$

där koefficienterna a_n och b_n ges av

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \cos(nt)\, dt, \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \sin(nt)\, dt.$$

Vi beräknar först a_0:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} \sin t\, dt + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \cos t\, dt$$
$$= -\frac{1}{\pi} \Big[-\cos t \Big]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi} \Big[\sin t \Big]_{0}^{\pi} = \frac{2}{\pi}.$$

Därefter tar vi a_1:

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\cos t\,dt = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \sin t\cos t\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos^2 t\,dt$$
$$= -\frac{1}{4\pi}\Big[-\cos(2t)\Big]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\left[\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\,\sin(2t)\right]_{0}^{\pi} = \frac{1}{2},$$

i enlighet med BETA, s. 163. Likaså beräknas b_1:

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\sin t\,dt = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \sin^2 t\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos t\,\sin t\,dt$$
$$= -\frac{1}{\pi}\left[\frac{t}{2} - \frac{1}{4}\,\sin(2t)\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{4\pi}\Big[-\cos(2t)\Big]_{-\pi}^{0} = -\frac{1}{2}.$$

För $n > 1$ nyttjar vi relationerna på s. 165 i BETA, och får fram att

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\cos(nt)\,dt = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \sin t\,\cos(nt)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos t\,\cos(nt)\,dt$$
$$= -\frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos[(1-n)t]}{2(1-n)} - \frac{\cos[(1+n)t]}{2(1+n)}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin[(1-n)t]}{2(1-n)} + \frac{\sin[(1+n)t]}{2(1+n)}\right]_{-\pi}^{0}$$
$$= \frac{1+(-1)^n}{\pi(n^2-1)}.$$

Motsvarande för b_n:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\sin(nt)\,dt = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \sin t\,\sin(nt)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos t\,\sin(nt)\,dt$$
$$= -\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin[(1-n)t]}{2(1-n)} - \frac{\sin[(1+n)t]}{2(1+n)}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos[(n-1)t]}{2(n-1)} - \frac{\cos[(n+1)t]}{2(n+1)}\right]_{0}^{\pi}$$
$$= [1+(-1)^n]\,\frac{n}{\pi(n^2-1)}.$$

Vi får alltså Fourierserien

$$f(t) \sim \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\big(\cos t - \sin t\big)$$
$$+ \sum_{n=2}^{+\infty}\left\{\frac{1+(-1)^n}{\pi(n^2-1)}\,\cos(nt) + [1+(-1)^n]\,\frac{n}{\pi(n^2-1)}\,\sin(nt)\right\}.$$

Höger led konvergerar mot funktionen, utom i alla språngpunkter. Höger led representerar alltså en 2π-periodisk utvidgning av $f(t)$ till hela linjen, vilken i språngpunkter antar medelvärdet av vänster- och högergränsvärdena. P g a svårigheten att producera datorteckningar avstår vi från att rita den begärda figuren.