Institutionen för matematik
KTH

Kontrollskrivning, 2004-11-05, kl. 08.15–10.00.

5B1206 Differentialekvationer I, för BDM.

Kontrollskrivning MODUL 2

1. (MODUL 2) Betrakta differentialekvation

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 4\,\frac{dy}{dt} + 4\,y = t^2\,e^{2t}. \tag{1}$$

Två lösningar till den relaterade differentialekvationen

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 4\,\frac{dy}{dt} + 4\,y = 0$$

är

$$y_1(t) = e^{2t}, \qquad y_2(t) = t\,e^{2t}.$$

Finn med hjälp av denna information den allmänna lösningen till ekvation (1). Bestäm därur den lösning till (1) som har begynnelsedata $y(0) = y'(0) = 0$.

Vi tillämpar metoden med variation av parametrar, och beräknar först Wronskianen för y_1, y_2:

$$W = \det\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} e^{2t} & t\,e^{2t} \\ 2e^{2t} & e^{2t} + 2t\,e^{2t} \end{bmatrix} = e^{4t}.$$

Enligt metoden, skriver vi $y = u_1y_1 + u_2y_2$, där u_1, u_2 är två sökta funktioner, och vi vet att en lösning fås (med $f(t) = t^2\,e^{2t}$) ur

$$u_1' = -\frac{y_2 f}{W} = -\frac{t\,e^{2t}t^2e^{2t}}{e^{4t}} = -t^3, \qquad u_2' = \frac{y_1 f}{W} = \frac{e^{2t}t^2e^{2t}}{e^{4t}} = t^2.$$

Vi söker bara två sådana funktioner u_1, u_2, och väljer

$$u_1 = -\frac{t^4}{4}, \qquad u_2 = \frac{t^3}{3}.$$

Detta ger partikulärlösningen

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2 = -\frac{t^4}{4}\,e^{2t} + \frac{t^3}{3}\,t\,e^{2t} = \frac{t^4}{12}\,e^{2t},$$

och således blir den allmänna lösningen

$$y = y_p + y_h = \frac{t^4}{12}\,e^{2t} + C_1\,e^{2t} + C_2\,t\,e^{2t}.$$

Den lösning som har $y(0) = y'(0) = 0$ är förstås den med $C_1 = C_2 = 0$, dvs partikulärlösningen

$$y = \frac{t^4}{12}\,e^{2t}.$$