Institutionen för matematik
KTH

Kontrollskrivning, 2004-11-05, kl. 08.15–10.00.

5B1206 Differentialekvationer I, för BDM.

Kontrollskrivning MODUL 5

1. (MODUL 5) Betrakta värmeledningsekvationen

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) - \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = 0, \qquad (0 < x < \pi,\ \ t > 0)$$

med randvillkor

$$u(t,0) = 0, \qquad u(t,\pi) = 1, \qquad (t > 0).$$

Begynnelsedata är

$$u(0,x) = 1 + \frac{x}{\pi}, \qquad (0 < x < \pi).$$

Finn den funktion $u(t,x)$ som löser ovanstående värmeledningsproblem.

Vi observerar först att vi har inhomogena randdata i $x = \pi$, vilket föranleder oss att först bilda den linjära funktionen

$$L(x) = \frac{x}{\pi},$$

som har värde 0 för $x = 0$ och värde 1 för $x = \pi$. Den har

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 0.$$

Vi bildar nu funktionen

$$v(t,x) = u(t,x) - L(x),$$

som alltså löser ovanstående värmeledningsekvation, fast med randdata

$$v(t,0) = 0, \qquad v(t,\pi) = 0, \qquad (t > 0)$$

och begynnelsedata

$$v(0,x) = 1, \qquad (0 < x < \pi).$$

Vi befinner oss nu i standardsituationen, som i BETA, s. 237. I enlighet med detta är v på formen

$$v(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n\, e^{-4n^2 t} \sin(nx).$$

För $t = 0$ ger våra begynnelsedata att

$$v(0,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \sin(nx) = 1.$$

Dvs en sinusserie ska representera funktionen som är konstant 1 på intervallet från 0 till π. En sinusserie är alltid udda, så den funktion vi får blir udda och av period

2π. Vi känner igen den som graf (2) i BETA, s. 309, med $\alpha = 1$, $L = \pi$, och där ges Fourierserien som

$$\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 + (-1)^{n-1}}{n} \sin(nx).$$

Våra koefficienter c_n ges alltså av

$$c_n = \frac{2(1 + (-1)^{n-1})}{\pi\, n}.$$

Funktionen v är alltså

$$v(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(1 + (-1)^{n-1})}{\pi\, n}\, e^{-4n^2 t} \sin(nx) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2k+1}\, e^{-4(2k+1)^2 t} \sin\big((2k+1)x\big).$$

Vår sökta funktion u är därför

$$u(t,x) = L(x) + v(t,x) = \frac{x}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2k+1}\, e^{-4(2k+1)^2 t} \sin\big((2k+1)x\big).$$