Institutionen för matematik
KTH

Tentamensskrivning, 2002-10-16, kl. 14.00–19.00.

5B1210 Matematik IV, för B, M, och I.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.

För godkänt betyg (3) krävs 18 poäng, medan för betyg 4 krävs 25 poäng, och för betyg 5 32 poäng. Lösningarna skall motiveras väl!

TENTAMENSSKRIVNING

1. Bestäm, på explicit form, alla lösningar till differentialekvationen

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - 9.$$

Av vilken ordning är differentialekvationen? Är den linjär eller autonom? Finn även den lösning som har begynnelsevärde $y(0) = 0$, och beskriv var denna är definierad. (4)

Differentialekvationen är olinjär och autonom.

Vi kör med variabelseparationsmetoden:

$$\frac{dy}{y^2 - 9} = dx,$$

så integration ger

$$\int \frac{dy}{y^2 - 9} = \int dx = x + C_1,$$

där C_1 är en konstant. Partialbråksuppdelning ger

$$\frac{1}{y^2 - 9} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{y-3} - \frac{1}{y+3}\right),$$

så att

$$\int \frac{dy}{y^2 - 9} = \frac{1}{6}(\ln|y-3| - \ln|y+3|) + C_2 = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{y-3}{y+3}\right| + C_2,$$

där C_2 är en annan konstant. Vi får alltså:

$$\frac{1}{6}\ln\left|\frac{y-3}{y+3}\right| = x + C_1 - C_2 = x + C_3,$$

om vi säger att $C_3 = C_1 - C_2$. Vi ser att $y = \pm 3$ är känsliga värden för funktionen, så

V.g. vänd!

dessa måste behandlas separat. Resterande fall sönderfaller i tre grupper:

$$y < -3, \qquad -3 < y < 3, \qquad y > 3.$$

Ifall $y < -3$, blir ekvationen

$$\frac{1}{6}\ln\left(\frac{y-3}{y+3}\right) = x + C_3,$$

det vill säga

$$\frac{y-3}{y+3} = e^{6C_3}\, e^{6x},$$

med lösning

$$y = -3\,\frac{Ce^{6x}+1}{Ce^{6x}-1}, \qquad \text{för} \quad x > -\frac{\ln C}{6} = -C_3,$$

om vi bestämmer att C är konstanten $C = e^{6C_3} > 0$. Om istället $-3 < y < 3$, blir ekvationen

$$\frac{1}{6}\ln\left(\frac{3-y}{y+3}\right) = x + C_3,$$

med lösning

$$y = 3\,\frac{1-Ce^{6x}}{1+Ce^{6x}}, \qquad \text{för alla} \quad x.$$

För $y > 3$, blir ekvationen återigen

$$\frac{1}{6}\ln\left(\frac{y-3}{y+3}\right) = x + C_3,$$

med lösdningen

$$y = 3\,\frac{1+Ce^{6x}}{1-Ce^{6x}}, \qquad \text{för} \quad x < -\frac{\ln C}{6} = -C_3.$$

Konstanten C är även i de två senaste formlerna $C = e^{6C_3} > 0$. Det återsår att observera att vi ̈ven har de speciella konstanta lösningarna

$$y = 3 \qquad \text{och} \qquad y = -3.$$

Enligt entydighetssatsen för första ordningens differentialekvationer finns det inga ytterligare lösningar än dessa ovan.

Vi finner nu den lösning som börjar i $y(0) = 0$. Vi är nu i fallet att $-3 < y < 3$, med allmän lösning

$$y = 3\,\frac{1-Ce^{6x}}{1+Ce^{6x}}, \qquad \text{för alla} \quad x.$$

Värdet för $x = 0$ blir

$$y(0) = 3\,\frac{1-C}{1+C},$$

vilket kräver att $C = 1$. Lösningen blir alltså:

$$y = 3\,\frac{1-e^{6x}}{1+e^{6x}}, \qquad \text{för alla} \quad x.$$

2. Låt T vara temperaturen hos en kaka och T_0 vara det omgivande rummets temperatur. Vi antar att Newtons avsvalningslag gäller, dvs att avsvalningshastigheten är proportionell mot temperaturdifferensen $T - T_0$. Rumstemperaturen är 20°C och kakan tas ut från en ugn med temperaturen 220°C. Efter 5 minuter är kakans temperatur 120°C. Bestäm kakans temperatur efter 20 minuter. (4)

Newtons avsvalningslag lyder

$$\frac{dT}{dt} = -k\big(T - T_0\big),$$

där k är en positiv konstant. Lösningen är på formen

$$T(t) = T_0 + C\,e^{-kt},$$

där C är en konstant, positiv eller negativ. I vårt fall är $T_0 = 20$, medan

$$T(0) = T_0 + C = 220.$$

Detta ger $C = 200$. Vi kan alltså skriva

$$T(t) = 20 + 200\,e^{-kt},$$

och vad som återstår är att fastställa värdet på k. Vi nyttjar att

$$T(5) = 20 + 200\,e^{-5k} = 120,$$

vilket ger $k = \frac{1}{5}\ln 2$. Vi får slutligen

$$T(20) = 20 + 200\,e^{-20k} = 20 + 200 \cdot 2^{-4} = 32.5°\text{C},$$

vilket utgör den sökta temperaturen.

3. Lös fullständigt differentialekvationen

$$y'' + 16\,y = \frac{1}{\cos(4x)}, \qquad 0 < x < \frac{\pi}{8}.$$

(5)

Den homogena differentialekvationen $y'' + 16y = 0$ har karakteristisk ekvation

$$\lambda^2 + 16 = 0,$$

med komplexa rötter $\lambda = \pm 4i$. Den allmänna lösningen till den homogena ekvationen är då

$$y_h = C_1\,\cos(4x) + C_2\,\sin(4x).$$

För att finna en partikulärlösning till den givna ekvationen gör vi ansatsen

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2,$$

där $y_1 = \cos(4x)$ och $y_2 = \sin(4x)$. Man får

$$u_1' = -\frac{y_2 R}{W}, \qquad u_2' = \frac{y_1 R}{W}, \qquad \text{där} \quad R = \frac{1}{\cos(4x)},$$

och W är Wronskianen:

$$W = \begin{vmatrix} \cos(4x) & \sin(4x) \\ -4\sin(4x) & 4\cos(4x) \end{vmatrix} = 4\cos^2(4x) + 4\sin^2(4x) = 4.$$

Alltså blir ekvationerna ovan

$$\begin{cases} u_1' = -\dfrac{\sin(4x)\,\frac{1}{\cos(4x)}}{4} = -\dfrac{1}{4}\,\tan(4x), \\ u_2' = \dfrac{\cos(4x)\,\frac{1}{\cos(4x)}}{4} = \dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

Härur följer att

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{16}\ln\bigl|\cos(4x)\bigr| + A, \\ u_2 = \dfrac{x}{4} + B. \end{cases}$$

På vårt intervall $]0, \pi/8[$ är $\cos(4x) > 0$, och genom att välja konstanterna $A = B = 0$, finner vi således partikulärlösningen

$$y_p = \frac{1}{16}\cos(4x)\,\bigl(\ln(\cos(4x))\bigr) + \frac{1}{4}\,x\,\sin(4x).$$

Den allmänna lösningen blir slutligen

$$y = y_p + y_h = \frac{1}{16}\cos(4x)\,\bigl(\ln(\cos(4x))\bigr) + \frac{1}{4}\,x\,\sin(4x) + C_1\,\cos(4x) + C_2\,\sin(4x),$$

där C_1, C_2 är två godtyckliga konstanter.

4. Bestäm en funktion f som satisfierar ekvationen

$$f(t) = \cos(3t) + \int_0^t e^{-\tau}\, f(t-\tau)\, d\tau$$

på intervallet $[0, +\infty[$. (4)

Vi använder Laplace-transformering. Vi noterar enligt BETA s. 326 att Laplace-transformen av en faltning är produkten av de två enskilda Laplace-transformerna. Laplace-transformen av $\cos(3t)$ är

$$\mathcal{L}\big[\cos(3t)\big](s) = \frac{s}{s^2+9},$$

medan Laplace-transformen av e^{-t} är

$$\mathcal{L}\big[e^{-t}\big](s) = \frac{1}{s+1}.$$

Vi får att

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}\big[\cos(3t)\big](s) + \mathcal{L}\left[\int_0^t e^{-\tau}\, f(t-\tau)\, d\tau\right](s) &= \frac{s}{s^2+9} + \mathcal{L}\big[e^{-t}\big](s)\mathcal{L}[f](s)\\ &= \frac{s}{s^2+9} + \frac{1}{s+1}\,\mathcal{L}[f](s),\end{aligned}$$

vilket ger

$$\left(1 - \frac{1}{s+1}\right)\mathcal{L}[f](s) = \frac{s}{s^2+9}.$$

Vi löser ut Laplace-transformen av f:

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{s+1}{s^2+9} = \frac{s}{s^2+9} + \frac{1}{s^2+9},$$

så att

$$f(t) = \cos(3t) + \frac{1}{3}\,\sin(3t)$$

är den sökta lösningen.

V.g. vänd!

5. Visa att kurvintegralen

$$\int_\Gamma \left(3x^2 + 2xy - 2x - y + 1\right) dx + \left(x^2 - x\right) dy$$

där Γ är en kurva från punkten $(0, a)$ till punkten $(1, b)$ är oberoende av värdet på de reella parametrarna a, b samt av valet av väg Γ, och ange dess värde. (5)

Sätt

$$P(x, y) = 3x^2 + 2xy - 2x - y + 1, \qquad Q(x, y) = x^2 - x.$$

Då blir

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 1.$$

Härav följer att det existerar en potentialfunktion U sådan att

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = Q,$$

och att

$$\int_\Gamma P dx + Q dy = U(1, b) - U(0, a)$$

är oberoende av valet av väg Γ. Vi löser ut U:

$$U'_y = x^2 - x \quad \Rightarrow \quad U = (x^2 - x)y + g(x) \quad \Rightarrow \quad U'_x = (2x - 1)y + g'(x) = P(x, y).$$

Detta ger att

$$g'(x) = 3x^2 - 2x + 1 \quad \Rightarrow \quad g(x) = x^3 - x^2 + x + C,$$

för någon konstant C. Vi väljer $C = 0$, vilket get

$$U(x, y) = (x^2 - x)y + x^3 - x^2 + x.$$

Härav följer att

$$U(1, b) - U(0, a) = 1 - 0 = 1,$$

och vi ser att

$$\int_\Gamma P dx + Q dy = 1$$

oberoende av punkterna a och b.

6. Beräkna trippelintegralen

$$\iiint_K \sqrt{x+y+z}\,dxdydz,$$

där K är kroppen som ges av följande villkor: $z \geq 0$, $x \leq 1$, $y \leq x$, och $z \leq y$. (5)

Låt I beteckna den sökta trippelintegralen. Vi ordnar olikheterna som definierar K:

$$0 \leq z \leq y \leq x \leq 1.$$

Detta gör att vi kan skriva I som tre upprepade enkelintegraler:

$$I = \int_0^1 \left\{ \int_0^x \left[\int_0^y \sqrt{x+y+z}\,dz \right] dy \right\} dx.$$

Vi beräknar den första inre integralen:

$$\int_0^y \sqrt{x+y+z}\,dz = \left[\frac{2}{3}\,(x+y+z)^{3/2} \right]_{z=0}^{z=y} = \frac{2}{3}\Big[(x+2y)^{3/2} - (x+y)^{3/2}\Big].$$

Så tar vi nästa nivå:

$$\int_0^x \frac{2}{3}\Big[(x+2y)^{3/2} - (x+y)^{3/2}\Big] = \frac{2}{15}\Big[(x+2y)^{5/2} - 2\,(x+y)^{5/2}\Big]_{y=0}^{y=x} =$$
$$\frac{2}{15}\Big[\big((3x)^{5/2} - 2(2x)^{5/2}\big) - \big(x^{5/2} - 2\,x^{5/2}\big)\Big] = \frac{2}{15}\Big[3^{5/2} - 2\cdot 2^{5/2} + 1\Big]x^{5/2}.$$

Vi erhåller slutligen

$$I = \frac{2}{15}\Big[3^{5/2} - 2\cdot 2^{5/2} + 1\Big]\int_0^1 x^{5/2}dx = \frac{2}{15}\Big[3^{5/2} - 2\cdot 2^{5/2} + 1\Big]\left[\frac{2x^{7/2}}{7}\right]_0^1$$
$$= \frac{4}{105}\Big[3^{5/2} - 2^{7/2} + 1\Big] = \frac{4}{105}\big[9\sqrt{3} - 8\sqrt{2} + 1\big].$$

7. Bestäm de kritiska punkterna till det autonoma systemet

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -x - e^x y. \end{cases}$$

Skriv upp det lineariserade systemet kring varje kritisk punkt på matrisform, och lös dessa lineariserade problem fullständigt; rita dessutom ett fasporträtt med flödeslinjer (banor). Avgör slutligen om det ursprungliga problemet är asymptotiskt stabilt eller ej. (5)

De kritiska punkterna ges som lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} y = 0 \\ -x - e^x\, y = 0, \end{cases}$$

vilket ger $x = y = 0$, dvs origo $(0,0)$ är den enda kritiska punkten. Låt P, Q vara

$$P = y, \qquad Q = -x - e^x\, y.$$

Linearisering ger systemet

$$X' = AX,$$

där

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad A = \begin{pmatrix} P'_x(0,0) & P'_y(0,0) \\ Q'_x(0,0) & Q'_y(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Härav följer $\det A = 1 \neq 0$ och

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(1+\lambda) + 1 = \lambda^2 + \lambda + 1.$$

Rötterna till ekvationen $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ blir

$$\lambda = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

och dessa utgör alltså egenvärdena till matrisen A. Eftersom dessa har negativ realdel är för det ursprungliga systemet origo en asymptotiskt stabil kritisk punkt. En egenvektor

$$K = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

svarande mot egenvärdet $\lambda = -\frac{1}{2} + i\sqrt{3}/2$ uppfyller

$$-\left(-\frac{1}{2} + i\sqrt{3}/2\right) k_1 + k_2 = 0, \qquad \text{dvs} \qquad k_2 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) k_1.$$

Vi kan välja $k_1 = 2$ och $k_2 = -1 + i\sqrt{3}$. Alltså har vi en egenvektor på formen

$$K = \begin{pmatrix} 2 \\ i\sqrt{3} - 1 \end{pmatrix}.$$

En komplex lösning till $X' = AX$ är således

$$\begin{aligned} Ke^{\lambda t} = \begin{pmatrix} 2 \\ i\sqrt{3} - 1 \end{pmatrix} e^{\left[-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]t} &= e^{-t/2} \begin{pmatrix} 2\cos(\sqrt{3}t/2) \\ -\cos(\sqrt{3}t/2) - \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t/2) \end{pmatrix} \\ &+ i\, e^{-t/2} \begin{pmatrix} 2\sin(\sqrt{3}t/2) \\ \sqrt{3}\cos(\sqrt{3}t/2) - \sin(\sqrt{3}t/2) \end{pmatrix} = X_1(t) + iX_2(t), \end{aligned}$$

där det är uppenbart vad kolonnvektorerna $X_1(t)$ och $X_2(t)$ står för. Den allmänna reella lösningen är då:

$$c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t),$$

där c_1, c_2 är två konstanta reella skalärer. Fasporträttet kan p g a grafiska svårigheter ej ritas här. Det består dock av spiralformade kurvor som flödar in mot origo. När vi närmar oss origo längs en bana rör vi oss medurs.

8. Låt $f(x) = x^2$ för x i intervallet $[-\pi, \pi]$. Beräkna Fourierserien för denna funktion. Rita sedan upp grafen för Fourierserien på intervallet $[-3\pi, 5\pi]$. (5)

Funktionen är jämn på intervallet $[-\pi, \pi]$, så Fourierserien blir på formen

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx),$$

där

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx)\, dx.$$

Observera att

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2\, dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}.$$

Vi koncerntrerar oss nu på $n = 1, 2, 3, \ldots$. En partialintegration ger

$$\pi\, a_n = \left[\frac{1}{n} \sin(nx)\, x^2 \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\, x\, dx = -\frac{2}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\, x\, dx.$$

Ytterligare en partialintegration ger så

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\, x\, dx = \left[-\frac{1}{n} \cos(nx)\, x \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \big(-\cos(nx) \big)\, dx = \frac{2\pi(-1)^{n-1}}{n}.$$

Resultatet blir att

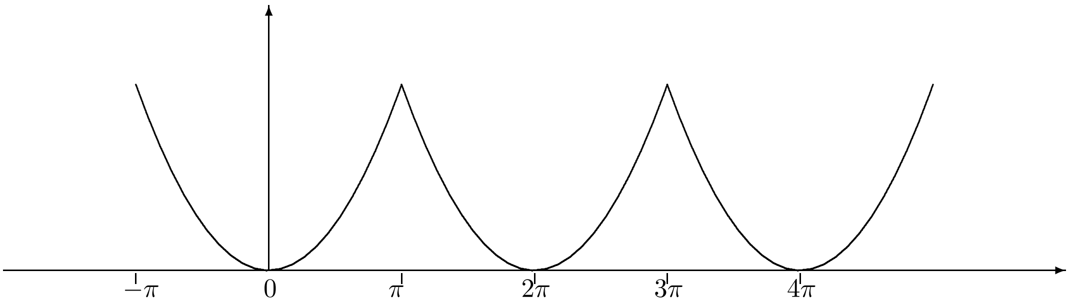
$$a_n = \frac{4(-1)^n}{n^2}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Fourierserien till funktionen blir alltså

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx),$$

och denna konvergerar mot funktionen x^2 på hela intervallet $[-\pi, \pi]$.

Grafen för Fourierserien ritas nedan (fast på det lite mindre intervallet $[-\pi, 5\pi]$).


$-\pi$
0
π
2π
3π
4π