

Tentamensskrivning, 2002-10-16, kl. 14.00–19.00.

5B1210 Matematik IV, för B och M.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.

För godkänt betyg (3) krävs 18 poäng, medan för betyg 4 krävs 25 poäng, och för betyg 5 32 poäng. Lösningarna skall motiveras väl!

TENTAMENSSKRIVNING

1. Bestäm, på explicit form, alla lösningar till differentialekvationen

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - 9.$$

Av vilken ordning är differentialekvationen? Är den linjär eller autonom? Finn även den lösning som har begynnelsevärde $y(0) = 0$, och beskriv var denna är definierad. (4)

2. Låt T vara temperaturen hos en kaka och T_0 vara det omgivande rummets temperatur. Vi antar att Newtons avsvlningslag gäller, dvs att avsvlningshastigheten är proportionell mot temperaturdifferensen $T - T_0$. Rumstemperaturen är 20°C och kakan tas ut från en ugn med temperaturen 220°C . Efter 5 minuter är kakans temperatur 120°C . Bestäm kakans temperatur efter 20 minuter. (4)

3. Lös fullständigt differentialekvationen

$$y'' + 16y = \frac{1}{\cos(4x)}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{8}. \quad (5)$$

4. Bestäm en funktion f som satisfierar ekvationen

$$f(t) = \cos(3t) + \int_0^t e^{-\tau} f(t - \tau) d\tau$$

på intervallet $[0, +\infty[$. (4)

5. Visa att kurvintegralen

$$\int_{\Gamma} (3x^2 + 2xy - 2x - y + 1) dx + (x^2 - x) dy$$

där Γ är en kurva från punkten $(0, a)$ till punkten $(1, b)$ är oberoende av värdet på de reella parametrarna a, b samt av valet av väg Γ , och ange dess värde. (5)

6. Beräkna trippelintegralen

$$\iiint_K \sqrt{x+y+z} \, dx dy dz,$$

där K är kroppen som ges av följande villkor: $z \geq 0$, $x \leq 1$, $y \leq x$, och $z \leq y$. (5)

7. Bestäm de kritiska punkterna till det autonoma systemet

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -x - e^x y. \end{cases}$$

Skriv upp det lineariserade systemet kring varje kritisk punkt på matrisform, och lös dessa lineariserade problem fullständigt; rita dessutom ett fasporträtt med flödeslinjer (banor). Avgör slutligen om det ursprungliga problemet är asymptotiskt stabilt eller ej. (5)

8. Låt $f(x) = x^2$ för x i intervallet $[-\pi, \pi]$. Beräkna Fourierserien för denna funktion. Rita sedan upp grafen för Fourierserien på intervallet $[-3\pi, 5\pi]$. (5)