

Tentamensskrivning, 2003-01-09, kl. 14.00–19.00.

5B1210 Matematik IV, för B och M.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.

För godkänt betyg (3) krävs 17 poäng, medan för betyg 4 krävs 25 poäng, och för betyg 5 32 poäng. Lösningarna skall motiveras väl!

TENTAMENSSKRIVNING

1. Bestäm, på explicit form, den lösning till differentialekvationen

$$\frac{y'}{\cos x} + y = 2e^{\sin x}$$

som uppfyller begynnelsevillkoret $y(0) = 3$. (4)

2. Öl som innehåller 6% alkohol (vi räknar volymsprocent) pumpas in i en tank, vilken innehåller 400 liter öl med alkoholhalten 3%. Ölet pumpas in med 3 liter per minut, och den välblandade vätskan pumpas ut med 4 liter per minut. Bestäm alkoholhalten i tanken efter 100 minuter. När är tanken tom? (4)

3. Bestäm den funktion $y = y(t)$ som satisfierar differentialekvationen

$$y'' - 4y' + 4y = 12t^2 e^{2t}$$

och begynnelsevillkoren $y(0) = y'(0) = 1$. (5)

4. Bestäm allmänna lösningen till differentialekvationen

$$x^2 y'' - x y' - 3y = 4x^3$$

på intervallet $x > 0$. En lösning till den motsvarande homogena differentialekvationen är $y_1(x) = x^3$. (5)

5. Sök största möjliga värdet för

$$\int_{\Gamma} (12x^2y + 4y^3) dx + (3x + 4y) dy$$

då kurvan Γ får variera över alla enkla slutna (regulära) kurvor i xy -planet som genomlöpes i positiv led. (5)

V.g. vänd!

6. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D (x + 2y) \, dx dy,$$

där D är kvadraten med hörn i punkterna $(3, 0)$, $(6, 3)$, $(3, 6)$, och $(0, 3)$. (4)

7. Bestäm alla kritiska punkter till det autonoma systemet

$$\begin{cases} x' = 1 + xy, \\ y' = x + y. \end{cases}$$

Bestäm deras typ (nod, sadelpunkt, spiral, centrum) och avgör om möjligt huruvida de är stabila eller instabila. (5)

8. Sätt $f(x) = \sin x$ för $0 \leq x \leq \pi$ och $f(x) = 1$ för $-\pi < x < 0$. Beräkna Fourierserien för denna funktion. Rita sedan upp grafen för Fourierserien på intervallet $[-3\pi, 3\pi]$. (5)