Institutionen för Matematik
KTH
Kirsti Mattila

Tentamensskrivning, Matematik påbyggnadskurs 5B1304

Fredagen den 19 maj 2006, kl 8.00-13.00

Preliminära betygsgränser för 3, 4 och 5 är 11, 15 och 19 poäng.
Tillåtet hjälpmedel är “Beta, Mathematics handbook”.

. . . .

1. Bestäm två linjärt oberoende serielösningar till differentialekvationen

$$xy'' + 3y' + 4x^3y = 0, \quad x > 0.$$

(3p)

2. Bestäm den allmänna lösningen till Euler-Cauchy-ekvationen

$$x^2y'' + xy' + 4y = \ln x, \qquad x > 0.$$

(2p)

3. Hitta Fourierserien till funktionen $f(x) = x, \quad -\pi < x < \pi$ (se Beta). Beräkna summorna $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1}$ och $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ med hjälp av serien. (3p)

4. a) Visa med variabelseparations-metoden att om $u(x,t) = X(x)T(t)$ är en lösning till problemet

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - 2u_x + u & 0 \le x \le \pi, \quad t > 0 \\ u(0,t) = 0, \quad t > 0 \\ u(\pi,t) = 0, \quad t > 0 \end{cases}$$

leder det till egenvärdesproblemet:

$$\begin{cases} X''(x) - 2X'(x) + (1+\lambda)X(x) = 0, \\ X(0) = X(\pi) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Bestäm egenvärden och egenfunktioner för problemet (1). (3p)

b) Visa att (1) är ett Sturm-Liouville-problem. Vad är dess viktfunktion? (2p)

v.g. vänd

5. Bestäm en funktion f som uppfyller ekvationen

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\, f(t)\, dt = e^{-x^2} \qquad -\infty < x < \infty.$$

(3p)

6. Beräkna integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+5)(x^2+1)}\, dx$$

med hjälp av residukalkyl. (3p)

7. Beräkna $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F} \cdot n)\, dS$, där $\mathbf{F}$ är vektorfältet $\mathbf{F}(x,y,z) = (y,-x,z^2)$, S är den del av ytan $z = \sqrt{x^2+y^2}$ där $0 \le z \le 2$ och n är ytans enhetsnormal som är riktad utåt. (3p)

Anm: Fouriertransformen av $f(t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a}} e^{-\frac{t^2}{4a}}$ är $\widehat{f}(\omega) = e^{-a\omega^2}$, $a > 0$. Beta innehåller bl. a. Parseval's ekvation för fourierserier och residusatsen.