KTH Matematik	Tentamensskrivning, 25/5-2007, kl 8.00–13.00.
Harald Lang	5B1306 Finansiell Matematik, gk.
	Hjälpmedel: miniräknare.

Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförlig lösning och motivering. Alla införda beteckningar som inte är standard skall definieras.

Möjligen har du användning av denna formel, som du bör känna till. Blacks prisformel säger att priset p på ett europeiskt derivat $f(X)$ på ett underliggande värde X är $p = \frac{Z_t}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(G_0 e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma\sqrt{t}\,x})\, e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx$ där G_0 är forwardpriset på X, σ är volatiliteten och Z_t nollkupongspriset på en nollkupong med samma inlösentid som optionen.

---

1. Bestäm forward-priset i svenska kronor (SEK) på en Engelsk aktie som kostar 10 GBP (Brittiska pund) idag. Forward-kontraktet inlöses om 18 månader, och aktien kommer att ge utdelning 1 GBP om sex månader. Pundets sex-månaders-ränta är 5% och 18-månaders-räntan är 5.3%. Motsvarande räntor för kronan är 3.2% respektive 3.5%. (Räntorna är per år med kontinuerlig förräntning.) Idag kostar 1 GBP 14 SEK. (10p.)

2. Bestäm priset **i EUR** (Euro) på en Europeisk säljoption på 1'000 EUR till inlösenvärdet 9'400 SEK (sv. kronor) med inlösen om 15 månader. En Euro kostar idag 9.20 SEK och Eurons volatilitet gentemot kronan antas vara 8% på ett år. Vi antar att kron-räntan är 6% och Euro-räntan 8% per år.

   Använd Blacks modell. Du behöver inte räkna ut värdet numeriskt, utan du kan ange det som en integral. (10p.)

3. Vi vill bestämma priset på en Europeisk köpoption. Optionen inlöses om 15 månader, och den underliggande obligationen ger kupongutdelningarna \$100 om 6, 12, 18, 24, 30 månader, och inlöses till \$1'500 om 36 månader (inklusive kupong) från idag. Vi antar att standard-avvikelsen för yieldens förändring under ett år är 0.01. Följande nollkupongs-räntor (per år) gäller:

6 mån	12 mån	15 mån	18 mån	24 mån	30 mån	36 mån
10.50%	10.90%	11.20%	11.50%	11.875%	12.10%	12.25%

   Använd Blacks modell för att bestämma optionspriset då inlösenpriset är \$1'465. Du behöver inte räkna ut värdet numeriskt, utan du kan ange det som en integral. (10p.)

4. Futures-priset på soyabönor att levereras om två månader är \$7 per bushel. Volatiliteten är 14% på ett år. Riskfria räntan är 4.8% per år. Bestäm priset på en amerikansk futures-sälj-option på 5'000 bushel soyabönor till inlösenvärdet \$35'000, då optionen och den underliggande futuren bägge inlöses om två månader. Använd tidssteget en halv månad i ett binomialträd. (10p.)

5. Vi har följande Ho-Lee binomialträd över räntan i % per tidsperiod (tiden går nerifrån och upp)

7.4	6.6	5.8	5.0
7.0	6.2	5.4	
6.6	5.8		
6.0			

(Vi antar att "settlement" för futurespriser sker en gång per period.) Bestäm <u>futurespriset och forwardpriset</u> på ett räntederivat som inlöses till 1'000 i period fyra **OM** räntan i period tre (till fyra) varit 7.4 eller 6.6%, **annars ger den ingenting**. Perioderna är numrerade så att "nu" är period noll; t.ex. är räntorna i period två (till tre) 7.0, 6.2 eller 5.4%.

Ledning: Tänk noga efter vad värdet är i period tre! (10p.)

6. Vi låter r_i beteckna räntan (per dag) från dag $i-1$ till dag i, och betecknar $R(t) = r_1 + \cdots + r_t$. Detta är alltså de stokastiska räntorna för "Money Market Account".

Vi vill nu bestämma priset på en köpoption på en aktie som inte ger utdelning fram till optionens inlösentid t, men inlösenpriset är $Ke^{R(t)}$, så inlösenpriset är inte helt bestämt idag, utan beror på ränteutvecklingen. Vi modellerar aktiepriset S_t vid tiden t som

$$\frac{S_t}{e^{R(t)}} = Ae^{\sigma\sqrt{t}\,z} \qquad z \in N(0,1)$$

Vi modellerar alltså inte S_t och $R(t)$ för sig, utan bara sambandet ovan.

Aktien kostar idag S_0 och en t-årig nollkupong kostar Z_t. Du skall ange motsvarigheten till Blacks prisformel för denna option. Du kan ange formeln som en integral som skall kunna beräknas om man vet värdena på S_0, Z_t, t, σ och K. (10p.)

<u>Svar:</u>

1. $140e^{0.0525} - 14e^{0.0275}$
2. Som Blacks formel ovan, med $G_0 = e^{-0.025} \cdot 9\text{'}200,\ \sigma = 0.08,\ t = 1.25,$ $Z_t = e^{-0.075},\ f(x) = (9\text{'}400 - x)^+$ och sedan dividerat med 9.20
3. Man får $y_F = 0.13$ exakt. Blacks formel, med $f(x) = (x - 1\text{'}465)^+,$ $G_0 = 1\text{'}467.30,\ \sigma = 0.0156,\ t = 1.25,\ Z_t = e^{-0.14}$.
4. \$756.87
5. Fut. priset = 500.00, fwd-priset = 494.00.
6. Blacks formel som ovan, med $f(x) = (x-K)^+,\ G_0 = S_0,\ \sigma = \sigma,\ t = t,\ Z_t = 1.$