Spelteori
Sammanfattning av artikel
Large Robust Games
av Ehud Kalai*

Mårten Marcus
mmar02@kth.se

May 19, 2010

1 Bakgrund

Antag att vi skall analysera ett spel med ett sort antal deltagare som har ett val att göra. Ställs detta spel upp på normalformen så kan man hitta Nashjämvikter till detta spel. Skulle man istället leta Nashjämvikter i någon extensiv form av normalformen sammanfaller inte nödvändigtvis dessa jämvikter med de som hittades på normalformen. Det kan i många fall vara osäkert vilken extensiv form spelet är på, till exempel kan det ibland vara oklart vilken spelare som får mest information och i vilken ordning de gör valen. Därför är det önskvärt att studera under vilka omständigheter en Nashjämvikt på normalformen är robust i det avseendet att den även ären Nashjämvikt för varje extensiv form av spelet, vilket alltså skulle medföra att särskild hänsyn till vilket extensivt spel som verkligen spelas inte behöver tas.

1.1 Speluppställningen

I artikeln definieras ett spel på följande vis.

$\mathcal{T}$ och $\mathcal{A}$ är två icketomma mängder innehållandes alla spelartyper och spelval som är möjliga under ett spel; $\mathcal{K} := \mathcal{T} \times \mathcal{A}$ innehåller vad som definieras som typ-vals-karaktärer. En familj $\Gamma = \Gamma(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ innehåller Bayesianska spel $G = (N, T, \tau, A, u)$ där $N = \{1, ldots, n\}$ är spelarna, $T = \times_{i=1}^{n} T_i$ är typprofiler där $T_i \subseteq \mathcal{T}$, $\forall i \in N$. $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$ är sådan att $\tau_i(t) \geq 0$, $\sum_{t \in T_i} \tau_i(t) = 1$ $\forall i \in N$, $A = \times_{i=1}^{n} A_i$ där $A_i \subseteq \mathcal{A}$, $\forall i \in N$ och $C_i := T_i \times A_i$ definierar de möjliga typvalskaraktärerna för spelare i i spel G. Nyttofunktionen $u = (u_1, \ldots, u_n)$ är då sådan att $u : C \to \times_{i=1}^{n}[0, 1]$. Vidare definieras ett Bayesianskt spel, nämnt ovan, så att varje spelare i tilldelas en typ $t_i \in T_i$ genom den förutbestämda sannolikhetsfördelningen τ_i, varpå spelaren , genom blandad eller ren strategi, väljer ett spelval $a_i \in A_i$ och får avkastningen genererad av $c = (\{t_1, a_1\}, \ldots, \{t_n, a_n\}) \in C$.

*E. Kalai (2004). *"Large Robust Games"*. Econometrica, Vol. 72, No.6, p. 1631-1665

Utifrån denna process beräknas $\gamma(c) = (P(c_1 = \{t_1, a_1\}), \ldots, P(c_n = \{t_n, a_n\}))$, där $P(c_i = \{t_i, a_i\}) := \sigma_i(a_i|t_i)\tau_i(t_i)$, för en (ren eller blandad) strategi σ_i. Inkluderat kravet på oberoende mellan de individuella sannolikhetsfördelningarna fås $P(c) = \Pi_{i=n}^{n}\gamma_i(c_i)$. Nyttofunktionen skrivs som $u_i(\sigma) = \mathbb{E}[u_i(c)]$ och en Nashjämvikt σ är en strategi sådan att $u_i(\sigma) \geq u_i(\sigma_i', \sigma_{-i})$ för alla spelare och alla strategier σ_i'.

1.2 Semianonymitet och kontinuitet

Definition 1. För varje $c \in C$ deinieras den empiriska fördelningen som

$$emp_c(\kappa) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{\{c_i = \kappa\}}}{n}.$$

Vissa inskränkningar på familjen Γ krävs för resultaten i senare delar, därav de två följande definitionerna. Den första säger att avkastningsfunktionen för en spelare inte är beroende av vilken av de andra spelarna som spelar en viss typ-vals-karaktär, den andra ger en särskild definition av kontinuitet med avseende på den empiriska fördelningen definierad ovan.

Definition 2. Spelen i Γ är semianonyma om det för alla spelare i och för varje $c, \bar{c} \in C$ fås att $u_i(c) = u_i(\bar{c})$ då $c_i = \bar{c}_i$ och $emp_{c_{-i}}(\kappa) = emp_{\bar{c}_{-i}}(\kappa)$.

Definition 3. Avkastningsfunktionen u är uniformt jämnkontinuerlig om det för alla $\epsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$ sådant att för alla $G \in \Gamma$ och varje spelare $i \in N$ följer att för $c, \bar{c} \in C$, $|u_i(c) - u_i(\bar{c}_i)| < \epsilon$ då $c_i = \bar{c}_i$ och $\max_{\kappa \in \mathcal{K}} |emp_{c_{-i}}(\kappa) - emp_{\bar{c}_{-i}}(\kappa)| < \delta$.

1.3 Ex-post Nash och extensivt robusta strategier

Två centrala begrepp i artikeln är ex$-$post Nash$-$strategier och extensivt robusta strategier. En Nashjämvikt til G är ex$-$post Nash om varje spelare,efter att samtliga spelare gjort sitt val, tittar tillbaka på sin strategi utan att i efterhand vilja byta strategi. En Nashjämvikt till G är exstensivt robust om den är en Nashjämvikt i varje extensiv form av spelet. Anta ett bayesianskt spel G. En extensiv form av detta spel är att först låta alla spelare göra sina val samtidigt och sedan låta var och en av spelarna välja huruvida de vill ändra sin ursprungliga strategi givet de andras tidigare val. En Nashjämvikt till denna extensiva form av G är ex$-$post$-$Nash per definition, men den är inte nödvändigtvis extensivt robust. Slutsatsen är att extensiv robusthet är starkare än ex$-$post$-$Nash eftersom en extensivt robust strategi kräver att strategin är en Nashjämvikt i alla extensiva former av G.

För att kunna hantera övergången från ex$-$post Nash till den mycket mer omfattande extensiva robustheten, definieras en *extensiv version* av spelet G, kallad $\bar{G}$. Tanken med att definiera en extensiv version är att beskriva en uppsättning extensiva former av G som är stor nog att kunna inhysa de flesta upptänkliga former av extensiva utvidgningar av G. Ett antal kriterier ges för att $\bar{G}$ skall vara en extensiv version av G, med den viktiga inskränkningen att varje *konstant strategi* i G kan spelas. Kalla en strategi i $\bar{G}$ för $si\bar{g}ma$. En konstant strategi $\bar{\sigma}$ är sådan att alla spelare $i \in N$ skall kunna välja alla a_i

som spelaren skulle ha möjlighet att välja om det varit spel G i den inledande informationsmängden; spelaren skall sedan spelar samma val a_i i alla senare informationsmängder. Detta gör det möjligt att bibehålla det ursprungliga valet a_i oavsett vilken ny information som än inkommit senare i spelet.

2 Resultat

Det första resultatet kräver följande definition

Definition 4. Låt $\epsilon > 0$. $c = (\{t_1, a_1\}, \ldots, \{t_n, a_n\})$ är "$\epsilon-$bästa svar" för spelare i om alla val $a_i' \in A_i$ ger $u_i(\{t_i, a_i'\}; c_{-i}) \leq u_i(c) + \epsilon$; c är $\epsilon-$Nash om detta gäller för varje spelare $i \in N$.
Vidare, för $\rho > 0$, är en strategiprofil σ en (ϵ, ρ)ex$-$post$-$Nashjämvikt om sannolikheten att profilen når en $\epsilon-$Nashjämvikt av typ$-$vals$-$karaktärer är minst $1 - \rho$.

Det första resultatet säger att Nashjämvikterna i en familj av bayesianska spel närmar sig en ex$-$post$-$Nashjämvikt i den approximativa meningen som läggs fram i Definition 4 då antalet spelare växer.

Teorem 1. Antag att familjen av Bayesianska spel $\Gamma(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ är semianonyma enligt Definition 2 och att de har en kontinuerlig avkastningsfunktion enligt Definition 3 och låt $\epsilon > 0$. Då existerar konstanter $\alpha = \alpha(\Gamma, \epsilon)$ och $\beta = \beta(\Gamma, \epsilon)$ med $\beta < 1$ sådana att man för varje m har att alla Nashjämvikter till spel i Γ med minst m spelare är $(\epsilon, \alpha\beta^m)ex-$post Nashjämvikter

För det andra resultatet behövs ett par klargöranden. För en extensiv version $\bar{G}$ är $\bar{\eta} = (\bar{\eta}_1, \ldots, \bar{\eta}_n)$ en uppsättning beteende("behavioral")$-$strategier. En spelare i sägs ha en *bättre än $\epsilon-$förbättring* i någon informationsmängd A_i om det existerar ett $\bar{\eta}'$ sådant att $\mathbb{E}_{\bar{\eta}'}[u_i|A] - \mathbb{E}_{\bar{\eta}}[u_i|A] > \epsilon$, där $\bar{\eta}' = (\bar{\eta}_1, \ldots, \bar{\eta}_i', \ldots, \bar{\eta}_n)$och $\bar{\eta}_i'$ är sådan att $\bar{\eta}_i'$ och $\bar{\eta}_i$ sammanfaller i alla informationsmängder tillhörandes spelare i som inte följer på informationsmängd A.

Definition 5. En strategiprofil $\bar{\eta}$ till $\bar{G}$ är en $(\epsilon, \rho)-$Nashjämvikt om sannolikheten att en spelare har en bättre än $\epsilon-$förbättring i någon informationsmängd inte är större än ρ.

Definition 6. En Nashjämvikt σ till det Bayesianska spelet G är $(\epsilon, \rho)-$exstensivt robust om, i varje extensiv version $\bar{G}$ av G, gäller att den konstanta spelversionen av σ, $\bar{\sigma}$, är en $(\epsilon, \rho)-$Nashjämvikt.

Följande resultat är en utvidgning av Teorem 1 sådan att den innefattar även extensiva versioner.

Teorem 2. Antag att familjen av Bayesianska spel $\Gamma(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ är semianonyma enligt Definition 2 och att de har en kontinuerlig avkastningsfunktion enligt Definition 3 och låt $\epsilon > 0$. Då existerar konstanter $\alpha = \alpha(\Gamma, \epsilon)$ och $\beta = \beta(\Gamma, \epsilon)$ med $\beta < 1$ sådana att att alla Nashjämvikter till spel i Γ med minst m spelare är $(\epsilon, \alpha\beta^m)-$extensivt robusta.

3 Slutsatser och diskussion

Som inledningen av sammanfattningen antydde, är resultatet av artikeln att det under vissa omständigheter går att delvis bortse från vilken extensiv form av ett bayesianskt spel G man spelar närman söker en Nashjämvikt. Artikeln visar att ett stort antal spelare ger en typ av stabilitet i Nashjämviktsstrategierna som gör det mindre viktigt att ta hänsyn till annan information än den du får om hur G ser ut. Detta kan vara förmånligt i situationer där det är svårt att bestämma vilken extensiv form som är den korrekta. Ett intressant exempel på detta ges i artikeln; avsnitt 6.6 behandlar två olika teorier kring hur man skall se aktiehandel.

Å ena sidan kan man hävda att agenterna på marknaden tar sina beslut på marknadsinformation,egna åsikter och på marknadspriset för aktierna i fråga. Marknaden är då jämvikt eftersom värdet på aktierna inte påverkar beslutet för agenten.

Å andra sidan kan en spelteoretiker anse att detta val delvis görs på information *innan* valet att köpa eller sälja har gjorts, så som åsikten från agenten och marknadsinformation, och delvis på information *efter* valet har gjorts, vilket representeras av priset på aktien, eftersom detta egentligen inte ärkänt innan investeringen är gjord.

Uppfyller spelet för agenterna ovan villkoren i satserna ovan, innebär extensiv robusthet att information om vad det realiserade prist blev inte kommer att påverka beslutet för agenterna, vilket gör att de båda teorierna ger samma resultat.