Introduktion

Om matstatkursen: Att ge grundläggande kunskaper i sannolikhetslära och statistisk inferens samt att ge förståelse för och färdigheter i tillämpningen av dessa vetenskapsgrenar på konkreta problem.

Upplägg:

- Sannolikhetsteori, kapitel 1–9
- Beskrivande statistik, kapitel 11
- Statistikteori, kapitel 10, 12–16 + χ^2-testet

Grundläggande terminologi

Slumpförsök/random experiment: Ett försök där resultatet/utgången inte på förhand kan avgöras.

Utfall/sample point: Resultat av ett slumpförsök

Utfallsrum/sample space: Mängden av alla utfall. Betecknas Ω.

Händelse/event: En uppsättning intressanta utfall, en delmängd av utfallsrummet.

Exempel: Slumpförsök: ett tärningskast. Utfallsrummet $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (ändligt). Exempel på händelser: $A = \{$"udda antal prickar"$\} = \{1, 3, 5\}$. $B = \{$"minst fem"$\} = \{5, 6\}$.

Exempel: Slumpförsök: Ringa CSN tills man kommer fram. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ (uppräkneligt). $C = \{$"minst 10 ggr"$\} = \{10, 11, 12, \ldots\}$.

Exempel: Slumpförsök: livslängd glödlampa. $\Omega = \{x \geq 0 : x \in \mathbb{R}\}$ (överuppräkneligt oändligt).

Den tomma mängden $\varnothing$ betecknar en omöjlig händelse.

Händelser som mängder

Vi kan illustrera två händelser A och B för samma slumpförsök med en figur, ett så kallat Venn-diagram.

Händelse		Mängd
$\{$"A inträffar"$\}$		A
$\{$"A **eller** B inträffar"$\}$	union	$A \cup B$
$\{$"A **och** B inträffar"$\}$	snitt	$A \cap B$
$\{$"A inträffar **inte**"$\}$	komplement	A^*

Observera att beteckningen för komplementet inte är standardiserat. Andra vanliga beteckningar är A^c, A' mfl. Kurslitteraturen (Blom) använder beteckningen $\complement A$.

Om $A \cap B = \varnothing$ sägs händelserna vara *oförenliga* (ömsesidigt uteslutande), det vill säga, mängderna är *disjunkta*.

Exempel: $A^* = \{$"udda antal poäng"$\}^* = \{$"jämnt antal poäng"$\} = \{2, 4, 6\}$. $A \cup B = \{1, 3, 5, 6\}$, $A \cap B = \{5\}$, $A \cap A^* = \varnothing$.

Beteckningar: För fler händelser skriver vi

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_i \text{ för } A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$

och

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_i \text{ för } A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n.$$

Sannolikheten för en händelse A betecknas $\mathsf{P}(A)$.

Tolkning: Upprepa slumpförsöket n gånger och låt n_A vara antalet gånger som händelsen A inträffar. Då:

$$\frac{n_A}{n} \to \mathsf{P}(A)$$

då $n \to \infty$. Detta är *Stora talens lag* som kommer att visas i en form senare i kursen.

Kolmogorovs axiom: Ett mått P (funktion definierade på händelser) är ett sannolikhetsmått om:

1. $0 \leq \mathsf{P}(A) \leq 1$,
2. $\mathsf{P}(\Omega) = 1$,
3. $\mathsf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_k)$

för alla händelser A och oförenliga händelser $A_1, A_2, \ldots$.

Speciellt: $A, B : A \cap B = \varnothing$ ger $\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B)$. Tänk massa/area!

Notera att $A \cap A^* = \varnothing$ så

$$1 = \mathsf{P}(\Omega) = \mathsf{P}(A \cup A^*) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(A^*)\,.$$

Vi har således visat följande intuitivt riktiga sats.

Sats (2.1). $\mathsf{P}(A^*) = 1 - \mathsf{P}(A)$.

Sats (2.2 i Blom).

$$\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cap B)\,.$$

Bevis: Notera att

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}((A \cap B) \cup (A \cap B^*)) = \mathsf{P}(A \cap B) + \mathsf{P}(A \cap B^*)$$

så $\mathsf{P}(A \cap B^*) = \mathsf{P}(A) - \mathsf{P}(A \cap B)$. Nu är

$$\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(B \cup (A \cap B^*)) = \mathsf{P}(B) + \mathsf{P}(A \cap B^*) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cap B)\,.$$

Sats (Booles olikhet (2.3)).

$$\mathsf{P}(A \cup B) \leq \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B)$$

$$\mathsf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}(A_k)\,.$$

Uppräkneliga utfallsrum (2.4):

$$\Omega = \{u_1, u_2, u_3, \ldots\}$$

Vi kan då till varje utfall u_i i Ω tillskriva ett tal p_i som uppfyller

1. $0 \leq p_i \leq 1$
2. $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$

Låter vi $\mathsf{P}(\{u_i\}) = p_i$ ser vi att P uppfyller definitionen för ett sannolikhetsmått och det är helt OK att tolka p_i som sannolikheter för de enskilda utfallen.

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}\left(\bigcup_{u_i \in A} \{u_i\}\right) = \sum_{u_i \in A} \mathsf{P}(\{u_i\}) = \sum_{u_i \in A} p_i.$$

Speciellt: *likformig fördelning* definierar vad vi menar med ”på måfå”.

$$\Omega = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \qquad \mathsf{P}(\{u_i\}) = p_i = \frac{1}{n}.$$

för alla $i = 1, \ldots, n$. För en händelse A är då

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{u_i \in A} p_i = \frac{1}{n} \sum_{u_i \in A} 1 = \frac{\#\text{ element i } A}{\#\text{ element i } \Omega} = \frac{\#\text{ gynnsamma utfall}}{\#\text{ möjliga utfall}} = \frac{g}{m}.$$

Hur många gynnsamma/möjliga utfall finns det? För att räkna ut detta har vi hjälp av kombinatoriska resonemang.

Sats (Multiplikationsprincipen). Antalet sätt att utföra k operationer, där operation i kan utföras på n_i sätt, är

$$n_1 \cdot n_2 \cdots n_k.$$