

Konfidensintervall

Låt $X_1, \dots, X_n$ vara oberoende och normalfördelade,

$$X_i \text{ är } N(m, \sigma).$$

Skattningsvariabeln av m är $\bar{X}$ och vi vet att

$$\bar{X} \text{ är } N(m, \sigma/\sqrt{n}) \quad \text{alt.} \quad \frac{\bar{X} - m}{\sigma/\sqrt{n}} \text{ är } N(0, 1)$$

Vi kan ur normalfördelningstabeller för varje sannolikhet α bestämma kvantilen $\lambda_{\alpha/2}$ så att

$$P\left(\left|\frac{\bar{X} - m}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \leq \lambda_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha.$$

Alltså, med sannolikhet $1 - \alpha$ är

$$-\lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} - m \leq \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

eller

$$\bar{X} - \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{X} + \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Detta är ett [symmetriskt] konfidensintervall för väntevärdet, med konfidensgrad $1 - \alpha$.

OBS! Konfidensintervallet rör väntevärdet m och *inte* de enskilda observationerna.

Definition: Ett konfidensintervall för θ är ett stokastiskt intervall $I(X_1, \dots, X_n)$ som täcker θ med en given sannolikhet:

$$P(\theta \in I(X_1, \dots, X_n)) = 1 - \alpha = \text{konfidensgraden}.$$

I vårt exempel har konfidensintervallet dynamiken:

- Större/mindre σ ger längre/kortare intervall.
- Fler/färre observationer n ger kortare/längre intervall.
- Större/mindre konfidensgrad $1 - \alpha$ ger längre/kortare intervall.

Generellt: Om θ^* är $N(\theta, D)$ så med sannolikhet $1 - \alpha$ är

$$-\lambda_{\alpha/2} \leq \frac{\theta^* - \theta}{D} \leq \lambda_{\alpha/2}$$

eller

$$\theta \in \theta^* \pm \lambda_{\alpha/2} D$$

är ett (symmetriskt) konfidensintervall för θ med konfidensgrad $1 - \alpha$. "Punktskattning plus/minus normal-kvantil*standardavvikelse för skattningen."

För att räkna ut intervallet måste vi känna D , standardavvikelsen. Om vi inte måste den skattas.

Generellt: Om θ^* är approximativt $N(\theta, D)$ så är

$$\theta \in \theta^* \pm \lambda_{\alpha/2} D^*$$

är ett (symmetriskt) konfidensintervall för θ med konfidensgrad approximativt $1 - \alpha$. Approximativa intervall: "Punktskattning plus/minus normal-kvantil*medelfel för skattningen."

Exempel: Låt X räkna antalet $\perp$ vid n oberoende singlar av häftstift. X är $\text{Bin}(n, p)$ med p okänd. Med $n = 200$ försök gav utfallet $x = 117$ och skattningen $p^* = 117/200 \approx 58.5\%$. Eftersom X är binomialfördelad och en skattning av variansen

$$V(X) = np(1 - p)$$

är $200 p^*(1 - p^*) = 48.5 > 10$ är det rimligt att anta att fördelningen för X kan approximeras med normalfördelningen. Det innebär att även fördelningen för $p^* = X/n$ kan approximeras med normalfördelningen. Nu är

$$p^* \text{ approximativt } N\left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$$

så med sannolikhet approximativt $1 - \alpha$ är

$$p \in p^* \pm \lambda_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{n}}.$$

Med data får vi det observerade intervallet

$$p \in p^* \pm \lambda_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{n}} = 0.585 \pm 0.068 \quad (\approx 95\%)$$

eller

$$0.516 \leq p \leq 0.653 \quad (\approx 95\%).$$

Vi ser även att de föreslagna rimliga värdena på p alla tillåter normalapproximationen. Intervallet innehåller de av data föreslagna rimliga värdena på p . Ett påstående (en utsaga) om att p är 0.5 skulle vi inte tro på.

Vi skall nu betrakta specialfallet med konfidensintervall för väntevärdet i normalfördelningen.

Minns:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

Jämför:

$$\frac{\bar{X} - m}{\sigma/\sqrt{n}} \quad \text{och} \quad \frac{\bar{X} - m}{S/\sqrt{n}}$$

Storheten till höger har en fördelning som inte beror på m eller σ utan bara på antalet observationer n . Vi kan ställa upp tabeller över dess fördelning precis på samma sätt som vi har gjort för normalfördelningen. Vi säger att

$$\frac{\bar{X} - m}{S/\sqrt{n}} \text{ är } t(n-1),$$

utläst: " t -fördelad med $n - 1$ frihetsgrader". Utnyttjar vi tabellerna för t -fördelningen kan vi för varje sannolikhet α bestämma kvantiler $t_{\alpha/2}$ så att

$$P\left(\left|\frac{\bar{X} - m}{S/\sqrt{n}}\right| \leq t_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha.$$

Då är med sannolikhet $1 - \alpha$

$$-t_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{X} - m}{S/\sqrt{n}} \leq t_{\alpha/2}$$

eller

$$-t_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} - m \leq t_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

eller

$$\bar{X} - t_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{X} + t_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}.$$

Detta är ett [symmetriskt] konfidensintervall för m med konfidensgrad $1 - \alpha$.

Exempel: Från följande observationer på $n = 10$ normalfördelade stokastiska variabler

$$x_i : 5 \quad 4.1 \quad 5.4 \quad 5.5 \quad 4.5 \quad 6.1 \quad 6.1 \quad 5.3 \quad 5.5 \quad 5.4$$

fick vi punktskattningar

$$\bar{x} = 5.29, \quad s^2 = 0.39433 \quad \text{och} \quad s = 0.62796.$$

Med konfidensgrad $1 - \alpha = 0.95$ får man $t_{\alpha/2} = t_{0.025} = 2.2622$ ur tabellen för $t(n - 1) = t(9)$ -fördelningen. Det observerade intervallet blir

$$4.84 = \bar{x} - t_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + t_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} = 5.74 \quad (95\%).$$

Alternativt kan man skriva

$$m \in \bar{x} \pm t_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} = 5.29 \pm 0.45 \quad (95\%).$$

”Punktskattning plus/minus t-kvantil*medelfel för skattningen.”

Konfidensintervall för σ^2

Fördelningen för

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - m}{\sigma} \right)^2 = \sum_{i=1}^n Z_i^2$$

är fördelningen för en summa av kvadrater av oberoende $N(0, 1)$ -variabler, och beror inte på m eller σ . Fördelningen kallas χ^2 -fördelningen och parametern, antalet termer i summan, kallas dess frihetsgrader. Fördelningen finns tabulerad i formelsamlingen.

Man kan visa att

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma} \right)^2.$$

är $\chi^2(n-1)$ -fördelad. Vi kan således för varje sannolikhet α bestämma kvantilerna $\chi_{1-\alpha/2}^2$ och $\chi_{\alpha/2}^2$ så att

$$P \left(\chi_{1-\alpha/2}^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq \chi_{\alpha/2}^2 \right) = 1 - \alpha.$$

Så med sannolikhet $1 - \alpha$ är

$$\chi_{1-\alpha/2}^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq \chi_{\alpha/2}^2$$

eller

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2}^2} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2}.$$

Detta är ett [symmetriskt] konfidensintervall för σ^2 med konfidensgrad $1 - \alpha$. Vi kan få ett intervall för σ genom

$$\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2}^2}} \leq \sigma \leq \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2}}.$$

Exempel: Med $n = 10$ observationer fick vi punktskattningen $s^2 = 0.39433$ av σ^2 . Ur $\chi^2(9)$ -tabeller får vi att med $1 - \alpha = 0.95$ är tabellvärdena

$$\chi_{1-\alpha/2}^2 = \chi_{0.975}^2 = 2.7004 \quad \chi_{\alpha/2}^2 = \chi_{0.025}^2 = 19.023.$$

Alltså, ett observerat intervall för σ^2 är

$$0.18657 = \frac{(10-1)0.39433}{19.023} = \frac{(n-1)s^2}{\chi_{\alpha/2}^2} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2} = \frac{(10-1)0.39433}{2.7004} = 1.3143 \quad (95\%).$$

Motsvarande intervall för standardavvikelsen blir

$$0.43 = \sqrt{0.18657} \leq \sigma \leq \sqrt{1.3143} = 1.16 \quad (95\%).$$