

Markovprocesser

En familj av stokastiska variabler $(X(t))_{t \in T}$ kallas för en stokastisk process. Indexmängden T kan ofta tolkas som olika tidpunkter. Om T är uppräknelig sägs processen vara tidsdiskret, om $T = [0, \infty)$ sägs den vara tidskontinuerlig. Tillståndsmängden för processen, E , kan även vara diskret eller kontinuerlig. Vi kommer enbart att betrakta diskreta tillståndsmängder och inledningsvis ändliga, dvs. $E = \{u_1, u_2, \dots, u_N\}$.

Betrakta en tidsdiskret stokastisk process $(X_n)_{n \geq 0}$. Då är

$$\begin{aligned} P(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) \\ = P(X_0 = x_0) P(X_1 = x_1 | X_0 = x_0) \cdots P(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_0 = x_0). \end{aligned}$$

Definition: Den tidsdiskreta stokastiska processen sägs vara en *Markovprocess* om

$$P(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_0 = x_0) = P(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1})$$

för alla $n \geq 1$ och tillstånd $x_0, \dots, x_n$.

Detta innebär att för en Markovprocess är

$$\begin{aligned} P(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) \\ = P(X_0 = x_0) P(X_1 = x_1 | X_0 = x_0) P(X_2 = x_2 | X_1 = x_1) \cdots P(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}). \end{aligned}$$

Vidare kallas Markovprocessen *tidshomogen* om

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i) = p_{ij},$$

för alla $i, j \in E$ och $n \geq 0$.

Låt $p_{ij}^{(n)} = P(X_n = j | X_0 = i)$, sannolikheten att förflyttas från tillstånd i till j i n steg.

Vi har att

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(n+m)} &= P(X_{n+m} = j | X_0 = i) = \sum_k P(X_{m+n} = j, X_n = k | X_0 = i) \\ &= \sum_k P(X_{m+n} = j | X_n = k, X_0 = i) P(X_n = k | X_0 = i) \\ &= \sum_k P(X_{m+n} = j | X_n = k) P(X_n = k | X_0 = i) \\ &= \sum_k p_{kj}^{(m)} p_{ik}^{(n)}. \end{aligned}$$

Dvs, övergångsmatrisen

$$\mathbf{P}^{(n+m)} := \left[p_{ij}^{(n+m)} \right]_{i,j}$$

kan beräknas

$$\mathbf{P}^{(n+m)} = \mathbf{P}^{(n)} \mathbf{P}^{(m)}$$

för alla $n, m \geq 0$. $\mathbf{P}^{(0)}$ identifieras som $\mathbf{I}$, enhetsmatrisen, och

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^{(1)} = [p_{ij}]_{i,j} = [P(X_1 = j | X_0 = i)]_{i,j}.$$

Alla dessa övergångsmatriser har radsummor 1! Notera att E kan vara oändligt stor vilket ger ”matriser” med oändligt många rader och kolumner.

Komponenterna i radvektorn $\mathbf{p}^{(n)}$ av absoluta sannolikheter

$$\mathbf{p}^{(n)} = [\mathbf{P}(X_n = j)]_j,$$

där $\mathbf{p}^{(0)}$ är begynnelse- (initial-) -fördelningen, är

$$\mathbf{p}_j^{(n)} = \mathbf{P}(X_n = j) = \sum_i \mathbf{P}(X_n = j | X_0 = i) \mathbf{P}(X_0 = i) = \sum_i p_{ij}^{(n)} \mathbf{p}_i^{(0)}$$

dvs komponenterna i vektorn $\mathbf{p}^{(0)} \mathbf{P}^{(n)}$.

Sammanfattning:

Chapman-Kolmogorov

1. $\mathbf{P}^{(n+m)} = \mathbf{P}^{(n)} \cdot \mathbf{P}^{(m)}$.
2. $\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^n$.
3. $\mathbf{p}^{(n)} = \mathbf{p}^{(0)} \mathbf{P}^{(n)}$.

Exempel:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}^{(2)} = \mathbf{P}^2 = \begin{bmatrix} 0.53 & 0.31 & 0.16 \\ 0.18 & 0.57 & 0.25 \\ 0.27 & 0.4 & 0.33 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^{(0)} &= [1 \quad 0 \quad 0] \\ \mathbf{p}^{(1)} &= \mathbf{p}^{(0)} \mathbf{P} = [0.7 \quad 0.2 \quad 0.1] \\ \mathbf{p}^{(2)} &= \mathbf{p}^{(0)} \mathbf{P}^2 = [0.53 \quad 0.31 \quad 0.16] \end{aligned}$$

Asymptotik

Kedjan kan absorberas, kedjan kan fastna i en delmängd av tillstånd, kedjan kan försvinna iväg (om antalet tillstånd är oändligt).

Begrepp: Ett tillstånd i leder till tillstånd j om det finns ett direkt eller indirekt sätt att i 0 eller fler steg gå från i till j . Skrivs $i \rightarrow j$. Om $i \rightarrow j$ och $j \rightarrow i$ så *kommunicerar* i och j , $i \leftrightarrow j$. Notera att $i \leftrightarrow i$.

Tillståndsrummet E partitioneras i (*irreducibla*) delmängder, $E = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n$ där tillstånden i varje mängd kommunicerar.

Om $i \rightarrow j$ men $i \not\leftrightarrow j$ så sägs i 's irreducibla delmängd (ekvivalensklass) vara öppen. Ej öppen klass kallas slutna.

Varje ändligt tillståndsrum har *minst en* slutna irreducibel delmängd.

Ett tillstånd i sådant att $p_{ii} = 1$ kallas *absorberande*, $\{i\}$ är en slutna irreducibel delmängd. En kedja där de enda slutna irreducibla delklasserna är absorberande tillstånd kallas en A-kedja. Då är

$$E = \{\text{A-tillstånd}\} \cup \{\text{Genomgångstillstånd}\} = A \cup G.$$

Vi skall för en ändlig A-kedja fånga storheter som

1. $a_{ij} = P(\text{Kedjan absorberas i } j \text{ givet start i } i) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)}.$

Notera att $a_{ij} = 0$ för $j \in G$ och $a_{ij} = 0$ för $i \in A$ då $j \neq i$.

2. $T_i = \text{tiden till absorbtion givet start i } i. T_i = 0 \text{ för } i \in A. t_i = E[T_i].$

Sannolikheterna a_{ij} uppfyller

$$a_{ij} = \sum_k p_{ik} a_{kj} = p_{ij} + \sum_{k \in G} p_{ik} a_{kj}$$

för alla $i \in G, j \in A$.

På matrisform:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{GG} & \mathbf{P}_{GA} \\ \mathbf{P}_{AG} & \mathbf{P}_{AA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{GG} & \mathbf{P}_{GA} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}.$$

dvs $\mathbf{P}_{GA}$ och $\mathbf{P}_{GG}$ är övergångsmatriserna som fås om man bara betraktar övergångar g- till a-tillstånd respektive g- till g-tillstånd. Då är $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{i,j}$ en $|G| \times |A|$ -matris sådan att

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}_{GA} + \mathbf{P}_{GG}\mathbf{A}$$

vilket ger $(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{GG})\mathbf{A} = \mathbf{P}_{GA}$ eller

$$\mathbf{A} = (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{GG})^{-1} \mathbf{P}_{GA}.$$

Med $t_i = E[\text{tiden till absorbtion} | \text{start i } i]$. För tiderna t_i gäller

$$t_i = 1 + \sum_k p_{ik} t_k = t_i = 1 + \sum_{k \in G} p_{ik} t_k$$

för alla $i \in G$. Med $\mathbf{t}$ som kolumnvektor fås matrisformuleringen

$$\mathbf{t} = \mathbf{1} + \mathbf{P}_{GG}\mathbf{t}$$

eller

$$\mathbf{t} = (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{GG})^{-1} \mathbf{1}$$

där $\mathbf{1}$ är kolumnvektorn med ettor.

Vi utnyttjar här att för en händelse A definieras det betingade väntevärdet

$$E[T|A] = \sum_k k P(T = k|A).$$

samt lagen om total förväntan: om $A_1, \dots, A_n$ är händelser som partitionerar ett utfallsrum så är

$$\begin{aligned} E[T] &= \sum_k k P(T = k) = \sum_k k \sum_j P(T = k|A_j) P(A_j) = \sum_j P(A_j) \sum_k k P(T = k|A_j) \\ &= \sum_j E[T|A_j] P(A_j). \end{aligned}$$