

En kedja där de enda slutna irreducibla delklasserna är absorberande tillstånd kallas en A-kedja. Då är

$$E = \{\text{A-tillstånd}\} \cup \{\text{Genomgångstillstånd}\} = A \cup G.$$

Vi skall för en ändlig A-kedja fånga storheter som

1. $a_{ij} = P(\text{Kedjan absorberas i } j \text{ givet start i } i) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)}.$
Notera att $a_{ij} = 0$ för $j \in G$ och $a_{ij} = 0$ för $i \in A$ då $j \neq i$.
2. $T_i = \text{tiden till absorbtion givet start i } i. T_i = 0$ för $i \in A. t_i = E[T_i].$

Sannolikheterna a_{ij} uppfyller

$$a_{ij} = \sum_k p_{ik} a_{kj} = p_{ij} + \sum_{k \in G} p_{ik} a_{kj}$$

för alla $i \in G, j \in A$.

På matrisform:

$$P = \begin{bmatrix} P_{GG} & P_{GA} \\ P_{AG} & P_{AA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{GG} & P_{GA} \\ \mathbf{0} & I \end{bmatrix}.$$

dvs P_{GA} och P_{GG} är övergångsmatriserna som fås om man bara betraktar övergångar g- till a-tillstånd respektive g- till g-tillstånd. Då är $A = [a_{ij}]_{i,j}$ en $|G| \times |A|$ -matris sådan att

$$A = P_{GA} + P_{GG}A$$

vilket ger $(I - P_{GG})A = P_{GA}$ eller

$$A = (I - P_{GG})^{-1} P_{GA}.$$

Med $t_i = E[\text{tiden till absorbtion} | \text{start i } i]$. För tiderna t_i gäller

$$t_i = 1 + \sum_k p_{ik} t_k = t_i = 1 + \sum_{k \in G} p_{ik} t_k$$

för alla $i \in G$. Med $\mathbf{t}$ som kolumnvektor fås matrisformuleringen

$$\mathbf{t} = \mathbf{1} + P_{GG}\mathbf{t}$$

eller

$$\mathbf{t} = (I - P_{GG})^{-1} \mathbf{1}$$

där $\mathbf{1}$ är kolumnvektorn med ettor.

Vi utnyttjande här att för en händelse A definieras det betingade väntevärdet

$$E[T|A] = \sum_k k P(T = k|A).$$

samt lagen om total förväntan: om $A_1, \dots, A_n$ är händelser som partitionerar ett utfallsrum så är

$$\begin{aligned} E[T] &= \sum_k k P(T = k) = \sum_k k \sum_j P(T = k|A_j) P(A_j) = \sum_j P(A_j) \sum_k k P(T = k|A_j) \\ &= \sum_j E[T|A_j] P(A_j). \end{aligned}$$

Vi kan tillämpa detta med en initialfördelning $\mathbf{p}^{(0)}$. Det obetingade väntevärdet är då

$$E[\text{Tid till absorbtion}] = \sum_j \mathbf{t}_j \mathbf{p}_j^{(0)} = \mathbf{p}^{(0)} \mathbf{t}.$$

Stationärfördelning

Om man startar en Markovkedja med fördelning $\mathbf{p}^{(0)} = \boldsymbol{\pi}$ så är

$$\mathbf{p}^{(n)} = \mathbf{p}^{(0)} \mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{p}^{(0)} \mathbf{P}^n.$$

för $n \geq 0$. Om $n \rightarrow \infty$ vad händer med $\mathbf{p}^{(n)}$? Kan $\mathbf{p}^{(n)}$ konvergera mot en fördelning?

Tidsinvarianta fördelningar:

Definition: En fördelning $\boldsymbol{\pi}$ kallas för *stationärfördelning* till en Markovkedja med övergångsmatris $\mathbf{P}$ om

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{P}.$$

Om man en Markovkedja har initialfördelning $\mathbf{p}^{(0)} = \boldsymbol{\pi}$ så är

$$\mathbf{p}^{(n)} = \mathbf{p}^{(0)} \mathbf{P}^{(n)} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{P}^n = \boldsymbol{\pi} \mathbf{P} \mathbf{P}^{n-1} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{P}^{n-1} = \dots = \boldsymbol{\pi} \mathbf{P} = \boldsymbol{\pi}$$

för alla $n \geq 0$. Om $\mathbf{p}^{(n)}$ konvergerar måste gränsvärdet vara en stationärfördelning.

Definition: Om

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{p}^{(n)}$$

existerar och inte beror av $\mathbf{p}^{(0)}$ sägs Markovkedjan vara *ergodisk*.

Sats. En tidsdiskret Markovkedja med ändligt tillståndsrum har (minst) en stationär fördelning.

Sats. En irreducibel tidsdiskret Markovkedja med ändligt tillståndsrum har exakt en stationär fördelning.

Sats. En aperiodisk irreducibel tidsdiskret Markovkedja med ändligt tillståndsrum är ergodisk. (Gränsfördelningen är den unika stationärfördelningen.)

Definition: För tillstånd i låt

$$D_i = \{n : p_{ii}^{(n)} > 0\}$$

Låt d_i vara den största gemensamma delaren till talen i D_i . Talet d_i kallas *periodtiden* och om $d_i > 1$ kallas tillståndet i *periodiskt*, annars *aperiodiskt*.

Satserna kan generaliseras om "irreducibel" ersätts med att kedjan endast har en sluten irreducibel delklass. Fler slutna irreducibla delklasser ger fler stationärfördelningar och ingen ergodicitet.

Sats (Ergodicitetens huvudssats). För en ergodisk markovkedja $(X_n)_{n \geq 0}$ och en funktion $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ är

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n f(X_k) = \mathbb{E}[f(X)]$$

där X har fördelning $\boldsymbol{\pi}$, stationärfördelningen för Markovkedjan.

Sats. För en ergodisk kedja med stationärfördelning $\boldsymbol{\pi}$. Då är

$$\mathbb{E}[\text{tid mellan två besök i } i] = \frac{1}{\pi_i}$$

$$\mathbb{E}[\text{Antal besök i } i \text{ tillstånd } j \text{ mellan två besök i } i] = \frac{\pi_j}{\pi_i}.$$

Bevis: Antag att i är ett tillstånd i den slutna irreducibla delklassen av tillstånd och låt kedjan börja i tillstånd i , dvs. $P(X_0 = i) = 1$.

Då är sekvensen $T_1, T_2, \dots$ av återkomsttider till i en sekvens av oberoende och likafördelade stokastiska variabler. Stora talens lag ger att

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k T_i = E[T_i].$$

Låt funktionen $f(x) = 1$ om $x = i$ och 0 annars. Tag X med fördelning π . Då är

$$E[f(X)] = 1 \cdot P(X = i) + 0 \cdot P(X \neq i) = \pi_i$$

och enligt ergocitetssatsen

$$\pi_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{T_1 + \dots + T_k} = \frac{1}{E[T_i]}.$$