$M/M/c$

Poissonankomster, oberoende exponentialfördelade betjäningstider, c betjänare. Med $\rho = \lambda/c\mu < 1$ existerar stationärfördelningen

$$\pi_0 = \left(\sum_{k=0}^{c-1} \frac{c^k \rho^k}{k!} + \frac{c^c \rho^c}{c!} \frac{1}{1-\rho} \right)^{-1} \qquad \pi_k = \pi_0 \frac{(c\rho)^k}{k!},\ k = 1, \ldots, c \qquad \pi_{c+k} = \pi_c \rho^k,\ k \geq 0.$$

Låt X har fördelningen $\boldsymbol{\pi}$. Sannolikheten att en kund anländande till ett stationärt $M/M/c$-system får vänta är

$$\mathsf{P}\left(\text{vänta}\right) = \mathsf{P}\left(X \geq c\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{P}\left(X = c + k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_{c+k} = \pi_c \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k = \pi_c \frac{1}{1-\rho}.$$

Med X_q som det stationära antalet kunder i kö är

$$\mathsf{E}\left[X_q\right] \quad = \quad \mathsf{E}\left[\max(X - c, 0)\right] = \sum_{k=0}^{\infty} k \pi_{k+c} = \cdots = \pi_c \frac{\rho}{(1-\rho)^2} = \mathsf{P}\left(\text{vänta}\right) \frac{\rho}{1-\rho}$$

Låt S_q vara tiden en anländande kund tillbringar i kö när ankomster betjänas i turordning (FIFO-diciplin).

$$\mathsf{P}\left(S_q > t\right) \quad = \quad \cdots = \mathsf{P}\left(\text{vänta}\right) \mathrm{e}^{-c\mu(1-\rho)t}$$

Inför en stokastisk variabel I sådan att $\mathsf{P}\left(I = 1\right) = 1 - \mathsf{P}\left(I = 0\right) = \mathsf{P}\left(\text{vänta}\right)$ och S' exponentialfördelad med väntevärde $1/c\mu(1-\rho)$ oberoende av I. Då är $S_q = I \cdot S'$. Speciellt får vi att

$$\mathsf{E}\left[S_q\right] = \mathsf{E}\left[I \cdot S'\right] = \mathsf{E}\left[I\right] \mathsf{E}\left[S'\right] = \mathsf{P}\left(\text{vänta}\right) \cdot \frac{1}{c\mu(1-\rho)}.$$

Vidare, med S som tiden en ankommande kund tillbringar i ett stationärt system har väntevärde

$$\mathsf{E}\left[S\right] = \mathsf{E}\left[S_q\right] + \mathsf{E}\left[\text{betjäningstid}\right] = \mathsf{P}\left(\text{vänta}\right) \cdot \frac{1}{c\mu(1-\rho)} + \frac{1}{\mu}.$$

Slutligen,

$$\mathsf{E}\left[X\right] \quad = \quad \sum_{k=0}^{\infty} k \pi_k = \cdots = c\rho + \mathsf{E}\left[X_q\right].$$

Little's formler

$$\underbrace{\mathsf{E}\left[X_q\right]}_{=l_q} = \lambda \underbrace{\mathsf{E}\left[S_q\right]}_{=w_q} \qquad \underbrace{\mathsf{E}\left[X\right]}_{=l} = \lambda \underbrace{\mathsf{E}\left[S\right]}_{=w} \qquad \mathsf{E}\left[S\right] = \mathsf{E}\left[S_q\right] + \mathsf{E}\left[\text{betjäningstid}\right]$$

Med Little's formler får vi den genomsnittliga tiden i kö

$$\mathsf{E}\left[S_q\right] = \frac{1}{\lambda} \mathsf{E}\left[X_q\right] = \frac{1}{\lambda} \mathsf{P}\left(\text{vänta}\right) \frac{\lambda/c\mu}{1-\rho} = \mathsf{P}\left(\text{vänta}\right) \frac{1}{c\mu(1-\rho)}.$$

Tidsreversibilitet

Låt $(X_t)_{t\geq 0}$ vara en stationär Markovkedja. För $i \neq j$ är

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\left(X(t)=j|X(t+h)=i\right) &= \frac{\mathsf{P}\left(X(t)=j, X(t+h)=i\right)}{\mathsf{P}\left(X(t+h)=i\right)} \\
&= \frac{\mathsf{P}\left(X(t+h)=i|X(t)=j\right)\mathsf{P}\left(X(t)=j\right)}{\mathsf{P}\left(X(t+h)=i\right)} \\
&= \mathsf{P}\left(X(t+h)=i|X(t)=j\right)\frac{\pi_j}{\pi_i}
\end{aligned}$$

Detta ger att Markovkedjan i baklängestid har övergångsintensiteter

$$q'_{ij} = q_{ji}\pi_j/\pi_i,$$

En stationär födelse-/döds-process uppfyller

$$\pi_i q_{ij} = q_{ji}\pi_j \qquad (\text{dvs } \pi_i\lambda_i = \pi_{i+1}\mu_{i+1})$$

vilket innebär att $q_{ij} = q'_{ij}$, dvs framåtkedjan och bakåtkedjan har samma fördelning. Födelse-/döds-processer är tidsreversibla.

Ett stationärt $M/M/c$-system är tidsreversibelt. I det reverserade systemet är ankomstprocessen en Poissonprocess med intensitet λ och ankomster efter t är oberoende av $(X(s))_{s\leq t}$. Det betyder att i det ursprungliga systemet är avgångsprocessen en Poissonprocess med intensitet λ och avgångar före t är oberoende av $(X(s))_{s\geq t}$.

$M/M/1$ i tandem

Betrakta d stycken kösystem på rad. En kund som expedierats vid station 1 går vidare till station 2 därefter till station 3 och så vidare. Varje station har en betjänare och betjäningstiderna vid station $1, 2, \ldots, d$ är oberoende och exponentialfördelade med intensiteter $\mu_1, \ldots, \mu_d$. Ankomster utifrån sker enbart till station 1 enligt en Poissonprocess med intensitet $\lambda < \mu_j$, för alla j.

Med $\rho_1 = \lambda/\mu_1$ är station 1 ett $M/M/1$-system och stationärfördelningen för k kunder är $(1-\rho_1)\rho_1^k$. Om station 1 är stationär är utprocessen en Poissonprocess med intensitet λ och då är även station två ett $M/M/1$-system med stationär fördelning för k kunder $(1-\rho_2)\rho_2^k$, där $\rho_2 = \lambda/\mu_2$. Upprepas resonemanget fås att station j har en stationärfördelning

$$\mathsf{P}\left(X_j = k\right) = (1-\rho_j)\rho_j^k,\ k \geq 0,\ \rho_j = \lambda/\mu_j$$

Vidare är den simultana fördelningen för det stationära antalet kunder

$$\mathsf{P}\left(X_1 = k_1, \ldots, X_d = k_d\right) = (1-\rho_1)\rho_1^{k_1}\cdots(1-\rho_d)\rho_d^{k_d}.$$

Motsvarande kan göras för $M/M/c$-system. Antalet kunder vid stationerna i det stationära tandem-systemet av $M/M/c$-köer är simultant oberoende stokastiska variabler där marginalfördelningarna är desamma som för $M/M/c$-systemet.

$M/M/1$ med återkoppling

Ankomster sker enligt en Poissonprocess med intensitet λ. Betjäningstiderna är oberoende och exponentialfördelade med väntevärde $1/\mu$. Varje slutförd betjäning resulterar i en korrekt enhet med sannolikhet p oberoende av tidigare betjäningar. Icke-korrekta enheter servas på nytt.

Systemet har samma dynamik som ett $M/M/1$-system med ankomstintensitet λ och nettobetjäningsintensitet $p\mu$, dvs det existerar en stationärfördelning för antalet kunder som ges av

$$\pi_k = (1-\rho)\rho^k, \quad k \geq 0$$

då $\rho = \lambda/p\mu < 1$.

Låt Λ vara den totala ankomstintensiteten varmed enheter kommer till betjänaren, inklusive returer av icke-korrekta enheter. Då är $\Lambda(1-p) + \lambda = \Lambda$, dvs $\Lambda = \lambda/p$. Vi kan se systemet som ett system med ankomster enligt en (punkt-)process med intensitet Λ och betjäningsintensitet μ. Ankomstprocessen är ej en Poissonprocess.

Jacksonnätverk

System av återkopplade $M/M/c$-system.

- Ankomster till station i, $i = 1, \dots, d$ enligt en Poissonprocess med intensitet λ_i.
- Betjäningstiderna vid nod i är oberoende exponentialfördelade med väntevärden $1/\mu_i$.
- Markovska rutter i nätverket: en kund lämnar nod i och går till nod j med sannolikhet p_{ij}, oberoende av tidigare väg, och lämnar nätverket med sannolikhet $p_i = \sum_{j=1}^{d} p_{ij}$.

Alla storheter förutsätts vara oberoende.

Låt Λ_j vara den totala intensiteten ut ur nod j. Trafikbalans ger att Λ_j måste uppfylla

$$\Lambda_j = \lambda_j + \sum_{i=1}^{d} \Lambda_i p_{ij}.$$

Om $\rho_j = \Lambda_j/\mu_j < 1$, $j = 1, \dots, d$, så är $(X_1(t), \dots, X_d(t))_{t \geq 0}$ en ergodisk Markovkedja med stationärfördelning

$$\mathsf{P}\left(X_1 = x_1, \dots, X_d = x_d\right) = \mathsf{P}\left(X_1 = x_1\right) \cdots \mathsf{P}\left(X_d = x_d\right) = \pi_1(x_1) \cdots \pi_d(x_d)$$

där $\pi_i(k)$ är fördelningen för det i ett stationärt $M/M/c$-system finns k enheter.