Introduktion

Om matstatkursen: Att ge grundläggande kunskaper i sannolikhetslära och statistisk inferens samt att ge förståelse för och färdigheter i tillämpningen av dessa vetenskapsgrenar på konkreta problem.

Grundläggande terminologi

Slumpförsök: Ett försök där resultatet/utgången inte på förhand kan avgöras.

Utfall: Resultat av ett slumpförsök

Utfallsrum: Mängden av alla utfall. Betecknas Ω.

Händelse: En uppsättning intressanta utfall, en delmängd av utfallsrummet.

Exempel: Slumpförsök: ett tärningskast. Utfallsrummet $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (ändligt). Exempel på händelser: $A = \{$"udda antal prickar"$\} = \{1, 3, 5\}$. $B = \{$"minst fem"$\} = \{5, 6\}$.

Exempel: Slumpförsök: Ringa CSN tills man kommer fram. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ (oändligt men uppräkneligt).

Exempel: Slumpförsök: livslängd glödlampa. $\Omega = [0, \infty)$. (överuppräkneligt oändligt).

Händelser som mängder

Vi kan illustrera två händelser A och B för samma slumpförsök med en figur, ett så kallat Venn-diagram.

Händelse		Mängd
{"A inträffar"}		A
{"A **eller** B inträffar"}	union	$A \cup B$
{"A **och** B inträffar"}	snitt	$A \cap B$
{"A inträffar **inte**"}	komplement	A^*

Observera att beteckningen för komplementet inte är standardiserat.

Exempel: De Morgans lagar

$$A \cup B = (A^* \cap B^*)^* \qquad A \cap B = (A^* \cup B^*)^*$$

Exempel: $A^* = \{$"udda antal poäng"$\}^* = \{$"jämnt antal poäng"$\} = \{2, 4, 6\}$. $A \cap B = \{5\}$, $A \cap A^* = \varnothing$.

Den tomma mängden $\varnothing$ betecknar en omöjlig händelse.

Definition: Om $A \cap B = \varnothing$ sägs händelserna vara *oförenliga* (ömsesidigt uteslutande), det vill säga, mängderna är *disjunkta*.

Sannolikheten för en händelse A betecknas $\mathsf{P}(A)$.

Tolkning: Upprepa slumpförsöket n gånger och låt n_A vara antalet gånger som händelsen A inträffar. Då:

$$\frac{n_A}{n} \to \mathsf{P}(A)$$

då $n \to \infty$. Detta är *Stora talens lag* som kommer att visas i en form senare i kursen.

Kolmogorovs axiom: Ett mått P (funktion definierade på händelser) är ett sannolikhetsmått om:

1. $0 \leq \mathsf{P}(A) \leq 1$ för alla händelser A,
2. $\mathsf{P}(\Omega) = 1$,
3. $\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B)$ om A och B är oförenliga, $A \cap B = \varnothing$.

Notera att $A \cap A^* = \varnothing$ så

$$1 = \mathsf{P}(\Omega) = \mathsf{P}(A \cup A^*) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(A^*).$$

Vi har således visat följande intuitivt riktiga sats.

Sats (2.1). $\mathsf{P}(A^*) = 1 - \mathsf{P}(A)$.

Sats (2.2).

$$\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cap B).$$

Bevis: Notera att

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}((A \cap B) \cup (A \cap B^*)) = \mathsf{P}(A \cap B) + \mathsf{P}(A \cap B^*)$$

så $\mathsf{P}(A \cap B^*) = \mathsf{P}(A) - \mathsf{P}(A \cap B)$. Nu är

$$\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(B \cup (A \cap B^*)) = \mathsf{P}(B) + \mathsf{P}(A \cap B^*) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cap B).$$

Konstruktion av sannolikhetsmått för uppräkneliga utfallsrum (2.4):

Om

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots\}$$

så kan vi till varje utfall ω_i i Ω tillskriva ett tal p_i som uppfyller

1. $0 \leq p_i \leq 1$
2. $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$

och låta $\mathsf{P}(\{\omega_i\}) = p_i$. Då är

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}\left(\bigcup_{\omega_i \in A} \{\omega_i\}\right) = \sum_{\omega_i \in A} \mathsf{P}(\{\omega_i\}) = \sum_{\omega_i \in A} p_i.$$

Speciellt: *likformig fördelning* definierar vad vi menar med ”på måfå”.

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\} \qquad \mathsf{P}(\{\omega_i\}) = p_i = \frac{1}{n}.$$

för alla $i = 1, \ldots, n$. För en händelse A är då

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i = \sum_{\omega_i \in A} \frac{1}{n} = \frac{\#\text{ element i } A}{\#\text{ element i } \Omega}.$$

Hur många gynnsamma/möjliga utfall finns det? För att räkna ut detta har vi hjälp av kombinatoriska resonemang.

Sats (Multiplikationsprincipen). Antalet sätt att utföra k operationer, där operation i kan utföras på n_i sätt, är

$$n_1 \cdot n_2 \cdots n_k.$$

Antalet sätt vi kan välja ut k element bland n distinkta. (Sats 2.5–2.7)

	Med Återläggning	Utan Återläggning
Med Ordningshänsyn	n^k	$\frac{n!}{(n-k)!}$
Utan Ordningshänsyn	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$