Stationärfördelning för födelse-/dödsprocesser

Stationärfördelningen $\boldsymbol{\pi}$ måste uppfylla de lokala balansekvationerna:

$$\pi_{k-1}\lambda_{k-1} = \mu_k \pi_k.$$

Detta ger:

$$\pi_k = \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k}\pi_{k-1} = \frac{\lambda_{k-1}\lambda_{k-2}}{\mu_k\mu_{k-1}}\pi_{k-2} = \frac{\lambda_{k-1}\lambda_{k-2}\cdots\lambda_0}{\mu_k\mu_{k-1}\cdots\mu_1}\pi_0.$$

Med $\rho_0 = 1$ och $\rho_n = \prod_{k=1}^{n} \lambda_{k-1}/\mu_k$ så uppfyller $\pi_k = \rho_k\pi_0$ ekvationen $\boldsymbol{\pi Q} = \mathbf{0}$. Kan man sedan normalisera så att

$$1 = \sum_k \pi_k = \sum_k \rho_k\pi_0 = \pi_0\sum_k \rho_k,$$

dvs välja $\pi_0 = 1/\sum_k \rho_k$, får vi en sannolikhetsfördelning som lösning och alltså den unika gränsfördelningen för den ergodiska födelse-/döds-processen. (Normaliseringen förutrsätter att $\sum_k \rho_k < \infty$).

Exempel: M/M/1-systemet. Övergångsintensiteterna är $q_{k,k+1} = \lambda$, $q_{k+1,k} = \mu$ för $k \geq 0$. Fungerar som modell för ett kösystem där kunder kommer enligt en Poissonprocess med intensitet λ och kunders betjäningstid är oberoende och exponentialfördelade med väntevärde $1/\mu$.

Lokal balans ger stationärfördelningen $\boldsymbol{\pi}$ måste uppfylla

$$\pi_k = \underbrace{\frac{\lambda}{\mu}}_{=\rho}\pi_{k-1} = \rho\pi_{k-1} = \rho^2\pi_{k-2} = \cdots = \rho^k\pi_0.$$

Vi har att

$$\sum_{k=0}^{\infty}\pi_k = \sum_{k=0}^{\infty}\pi_0\rho^k < \infty$$

om $\rho < 1$, dvs $\lambda < \mu$. Då gäller att

$$\sum_{k=0}^{\infty}\pi_k = \sum_{k=0}^{\infty}\pi_0\rho^k = \pi_0\frac{1}{1-\rho} = 1,$$

om $\pi_0 = 1-\rho$. Alltså, om $\lambda < \mu$ existerar stationärfördelningen (och processen är ergodisk) och $\pi_k = (1-\rho)\rho^k$.

Fördelningen kallas geometrisk fördelning och är släkt med ffg-fördelningen. Om X är Geo(p) så är $X+1$ ffg(p). Alltså

$$\mathsf{E}[X] = \mathsf{E}[(X+1)-1] = \frac{1}{1-\rho} - 1 = \frac{\rho}{1-\rho}$$

och

$$\mathrm{V}(X) = \mathrm{V}((X+1)-1) = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}.$$

$M/M/c$

Poissonankomster, oberoende exponentialfördelade betjäningstider, c betjänare. Med $\rho = \lambda/c\mu < 1$ existerar stationärfördelningen

$$\pi_0 = \left(\sum_{k=0}^{c-1}\frac{c^k\rho^k}{k!} + \frac{c^c\rho^c}{c!}\frac{1}{1-\rho}\right)^{-1} \qquad \pi_k = \pi_0\frac{(c\rho)^k}{k!},\ k = 1,\ldots,c \qquad \pi_{c+k} = \pi_c\rho^k,\ k \geq 0.$$

Låt X har fördelningen $\boldsymbol{\pi}$. Sannolikheten att en kund anländande till ett stationärt $M/M/c$-system får vänta är

$$\mathsf{P}(\text{vänta}) = \mathsf{P}(X \geq c) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{P}(X = c+k) = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_{c+k} = \pi_c \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k = \pi_c \frac{1}{1-\rho}.$$

Med X_q som det stationära antalet kunder i kö är

$$\mathsf{E}[X_q] \quad = \quad \mathsf{E}[\max(X-c,0)] = \sum_{k=0}^{\infty} k\pi_{k+c} = \cdots = \pi_c \frac{\rho}{(1-\rho)^2} = \mathsf{P}(\text{vänta}) \frac{\rho}{1-\rho}$$

Låt S_q vara tiden en anländande kund tillbringar i kö när ankomster betjänas i turordning (FIFO-diciplin).

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(S_q > t) &= \cdots \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{P}(\text{högst } k \text{ färdiga på tid } t)\, \pi_{c+k} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} \frac{(c\mu t)^j}{j!} \mathrm{e}^{-c\mu t} \cdot \pi_c \rho^k \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(c\mu t)^j}{j!} \mathrm{e}^{-c\mu t} \sum_{k=j}^{\infty} \pi_c \rho^k = \frac{pi_c}{1-\rho} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(c\mu t)^j}{j!} \mathrm{e}^{-c\mu t} \rho^j \\
&= \mathsf{P}(\text{vänta})\, \mathrm{e}^{-c\mu t} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(c\mu t\rho)^j}{j!} = \mathsf{P}(\text{vänta})\, \mathrm{e}^{-c\mu t} \mathrm{e}^{c\mu t\rho} = \mathsf{P}(\text{vänta})\, \mathrm{e}^{-c\mu(1-\rho)t}
\end{aligned}$$

Inför en stokastisk variabel I sådan att $\mathsf{P}(I=1) = 1 - \mathsf{P}(I=0) = \mathsf{P}(\text{vänta})$ och S' exponentialfördelad med väntevärde $1/c\mu(1-\rho)$ oberoende av I. Då är $S_q = I \cdot S'$. Speciellt får vi att

$$\mathsf{E}[S_q] = \mathsf{E}[I \cdot S'] = \mathsf{E}[I]\, \mathsf{E}[S'] = \mathsf{P}(\text{vänta}) \cdot \frac{1}{c\mu(1-\rho)}.$$

Vidare, med S som tiden en ankommande kund tillbringar i ett stationärt system har väntevärde

$$\mathsf{E}[S] = \mathsf{E}[S_q] + \mathsf{E}[\text{betjäningstid}] = \mathsf{P}(\text{vänta}) \cdot \frac{1}{c\mu(1-\rho)} + \frac{1}{\mu}.$$

Slutligen,

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}[X] &= \sum_{k=0}^{\infty} k\pi_k = \cdots = \sum_{k=0}^{c} k\pi_k + \sum_{k=1}^{\infty} (c+k)\pi_{c+k} = \sum_{k=1}^{c} k \frac{(c\rho)^k}{k!} \pi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c+k)\rho^k \pi_c \\
&= c\rho \sum_{k=0}^{c-1} \frac{(c\rho)^k}{k!} \pi_0 + c\rho \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k \pi_c + \sum_{k=0}^{\infty} k\pi_{k+c} = c\rho \mathsf{P}(X \leq c-1) + c\rho \mathsf{P}(X \geq c) + \mathsf{E}[X_q] \\
&= c\rho + \mathsf{E}[X_q].
\end{aligned}$$

Little's formler

$$\underbrace{\mathsf{E}[X_q]}_{=l_q} = \lambda \underbrace{\mathsf{E}[S_q]}_{=w_q} \qquad \underbrace{\mathsf{E}[X]}_{=l} = \lambda \underbrace{\mathsf{E}[S]}_{=w} \qquad \mathsf{E}[S] = \mathsf{E}[S_q] + \mathsf{E}[\text{betjäningstid}]$$

Med Little's formler får vi den genomsnittliga tiden i kö

$$\mathsf{E}[S_q] = \frac{1}{\lambda} \mathsf{E}[X_q] = \frac{1}{\lambda} \mathsf{P}(\text{vänta}) \frac{\lambda/c\mu}{1-\rho} = \mathsf{P}(\text{vänta}) \frac{1}{c\mu(1-\rho)}.$$

Tidsreversibilitet

Låt $(X_t)_{t\geq 0}$ vara en stationär Markovkedja. För $i \neq j$ är

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\left(X(t)=j|X(t+h)=i\right) &= \frac{\mathsf{P}\left(X(t)=j, X(t+h)=i\right)}{\mathsf{P}\left(X(t+h)=i\right)} \\
&= \frac{\mathsf{P}\left(X(t+h)=i|X(t)=j\right)\mathsf{P}\left(X(t)=j\right)}{\mathsf{P}\left(X(t+h)=i\right)} \\
&= \mathsf{P}\left(X(t+h)=i|X(t)=j\right)\frac{\pi_j}{\pi_i}
\end{aligned}$$

Detta ger att Markovkedjan i baklängestid har övergångsintensiteter

$$q'_{ij} = q_{ji}\pi_j/\pi_i,$$

En stationär födelse-/döds-process uppfyller

$$\pi_i q_{ij} = q_{ji}\pi_j \qquad (\text{dvs } \pi_i\lambda_i = \pi_{i+1}\mu_{i+1})$$

vilket innebär att $q_{ij} = q'_{ij}$, dvs framåtkedjan och bakåtkedjan har samma fördelning. Födelse-/döds-processer är tidsreversibla.

Ett stationärt $M/M/c$-system är tidsreversibelt. I det reverserade systemet är ankomstprocessen en Poissonprocess med intensitet λ och ankomster efter t är oberoende av $(X(s))_{s\leq t}$. Det betyder att i det ursprungliga systemet är avgångsprocessen en Poissonprocess med intensitet λ och avgångar före t är oberoende av $(X(s))_{s\geq t}$.