

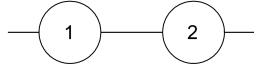


Problemsamling i Sannolikhetsteori
till
”An Intermediate Course in Probability”
av Allan Gut

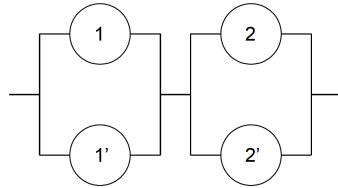
Kapitel 0 (Introduction)

1. Man har ett seriesystem med två enheter som går sönder oberoende av varandra och har sannolikheterna 0.9 resp. 0.8 att hålla en viss tid. För att öka systemets funktionssannolikhet ämnar man koppla in parallellenheter. Man kan då antingen dubblara varje enhet eller dubblara hela systemet. Bestäm funktionssannolikheterna för systemen nedan.

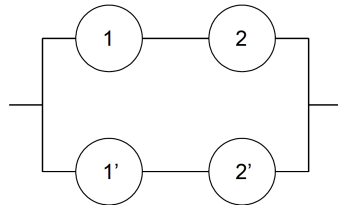
a.



b.



c.



2. Tennisspelarna A och B skall spela en match mot varandra. Man kan anta att sannolikheten att A vinner ett set är 0.6, oberoende av utgången av tidigare set. Matchen slutar när en av spelarna vunnit två set. Beräkna sannolikheten att matchen slutar efter två respektive tre set.
3. En person som har sex skott i sin pistol börjar skjuta mot målen $A_1, A_2, \dots$. Först skjuter han mot A_1 tills han träffar, sedan mot A_2 o.s.v. Träffsannolikheten är 0.4 i varje skott och resultaten i de olika skotten är oberoende. Beräkna sannolikheten att han träffar A_3 med sitt sjätte skott.
4. Händelser inträffar så att tiderna mellan händelserna är oberoende och $\text{Exp}(2)$. Ett räkneverk registrerar hur många händelser som inträffat från och med en starttid då verket nollställts. Detta räkneverk är dock behäftat med svagheten att det är "blockerat" under 0.1 tidsenheter efter en påbörjad registrering av en händelse. En händelse som inträffar under denna tid "missas".
Man nollställer verket och låter det gå tills det kommer upp till 10 registreringar. Hur stor är sannolikheten att inte mer än 10 händelser inträffat under detta tidsintervall?
5. Låt X_1 och X_2 vara oberoende stokastiska variabler med samma diskreta fördelning p_n ; $n = 1, 2, 3, \dots$, där $p_n \leq c$ för alla n .
Visa att $P(X_1 + X_2 = n) \leq c$.

6. Uppskatta, med hjälp av Tjebysjevs olikhet, $P(|\bar{X}| \geq 0.05)$ där $X_1, \dots, X_n$ är oberoende stokastiska variabler som är $U(-1, 1)$. Hur stort skall n väljas för att $P(|\bar{X}| \geq 0.05) \leq 0.05$ enligt denna uppskattning?
7. Man drar 13 kort på måfå och utan återläggning ur en vanlig kortlek. Låt X resp. Y vara antalet hjärter resp. spader bland de dragna korten. Beräkna $\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\text{Var } X \text{ Var } Y}}$.

Svar. 1a: 0.72. **1b:** 0.9504. **1c:** 0.9216. **2:** $P(2 \text{ set}) = 0.52$, $P(3 \text{ set}) = 0.48$.
3: 0.13824. **4:** $\exp(-0.45)$. **6:** $\frac{400}{3n}; n \geq 2667$. **7:** $-\frac{1}{3}$.

Kapitel 1 (Multivariate Random Variables)

1. Den stokastiska variabeln (X, Y) har täthetsfunktionen $f_{X,Y}(x, y) = (c/x)e^{-x^2y}$ för $x \geq 1$, $y \geq 0$ och $f_{X,Y}(x, y) = 0$ för övrigt. Bestäm konstanten c .

2. Låt (X, Y) vara en tvådimensionell stokastisk variabel med täthetsfunktionen

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{1+c}(xy + c)e^{-(x+y)} & \text{om } x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

där $c \geq 0$.

- a. Bestäm täthetsfunktionen för X och för Y .
b. Visa att om $c = 0$ så är X och Y oberoende, och att om $c > 0$ så är X och Y inte oberoende.
3. Den stokastiska variabeln (X, Y) har täthetsfunktionen

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}$$

där $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$. Bestäm

- a. fördelningsfunktionen $F_{X,Y}(x, y)$.
b. de marginella täthetsfunktionerna $f_X(x)$ och $f_Y(y)$.
4. En punkt $(\cos V, \sin V)$ väljs med likformig sannolikhetsfördelning på periferin till enhetscirkeln, dvs. V väljs likformigt på intervallet $(0, 2\pi)$. Låt R vara en av V oberoende stokastisk variabel sådan att $(R \cos V, R \sin V)$ är likformigt fördelad på enhetscirkelskivan $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, dvs. med konstant sannolikhetstäthet.

Bestäm R :s sannolikhetstäthet.

5. I ett tillförlitlighetssammanhang har man fått fram att (X, Y) , där X är tiden till första felet och Y är tiden till andra felet, har täthetsfunktionen

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} e^{-y} & \text{om } 0 \leq x \leq y \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Man förundrar sig över den enkla formeln för $f_{X,Y}(x, y)$ men kan inte direkt inse vad den står för.

- a. Bestäm de marginella täthetsfunktionerna $f_X(x)$ och $f_Y(y)$.
b. Visa att Y och X/Y är oberoende.
c. Hur kan (X, Y) ha uppkommit ur enklare fördelningar?

6. För en viss typ av apparat gäller följande. Om apparaten får en obruten energiförsörjning är dess livslängd $U \in \text{Exp}(1)$. Apparaten energitillförses av ett batteri, vilket dock bara fungerar 1 tidsenhet. Ange fördelningen för summan av livslängderna för två apparater. Apparaternas livslängder är oberoende av varandra.

Svar. 1: $c = 2$. **2a:** $f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x+c}{1+c}e^{-x} & x \geq 0. \end{cases}$

3a: $F_{X,Y}(x,y) = (\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan x)(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan y)$.

3b: $f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, $f_Y(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}$.

4: $f_R(r) = 2r$, $0 \leq r \leq 1$.

5a: $f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{om } x > 0 \\ 0 & \text{om } x \leq 0 \end{cases}$ $f_Y(y) = \begin{cases} ye^{-y} & \text{om } y > 0 \\ 0 & \text{om } y \leq 0. \end{cases}$

5c: Om t.ex. U och V är oberoende och $\text{Exp}(1)$ så är $X = U$ och $Y = U + V$.

6: $F_{T_1+T_2}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 - (1+t)e^{-t} & 0 \leq t < 1 \\ 1 - (3-t)e^{-t} & 1 \leq t < 2 \\ 1 & t \geq 2. \end{cases}$

Kapitel 2 (Conditioning)

1. Man har två urnor. I den ena finns två vita och tre svarta kulor, i den andra finns en vit och en svart kula. Man flyttar en på måfå vald kula från den första till den andra urnan utan att notera dess färg.
 - a. Om man nu drar en kula på måfå från den andra urnan, vad är sannolikheten för att den är vit?
 - b. Om man drar en kula från den andra urnan och finner att den är vit, vad är då den betingade sannolikheten för att den flyttade kulan var svart?
2. Två personer A och B skjuter mot en liten måltavla. A 's träffsannolikhet är hela tiden $\frac{1}{10}$ och B 's $\frac{1}{9}$. Man skjuter växelvis och A börjar. Beräkna sannolikheten för att A träffar först.
3. Bestäm den betingade täthetsfunktionen för Y givet $X = x$ i uppgift 5 kap. 1.
4. Låt X och Y vara oberoende stokastiska variabler sådana att X är $\text{Po}(\lambda)$ och Y är $\text{Po}(\mu)$. Sätt $Z = X + Y$. Bestäm
 - a. fördelningen för $X \mid Z = z$
 - b. $E(X \mid Z = z)$, $E(X \mid Z)$, $\text{Var}(X \mid Z = z)$, $\text{Var}(X \mid Z)$
 - c. $\rho(X, Z) = \frac{\text{Cov}(X, Z)}{\sqrt{\text{Var}(X) \text{Var}(Z)}}$
5. Låt X och Y vara oberoende stokastiska variabler sådana att X är $\text{Exp}(\mu)$ och Y är $U(0, \theta)$. Bestäm $P(X > Y)$.
6. Antalet röda blodkroppar i ett blodprov från en person är $\text{Po}(\lambda)$. Emellertid är parametern λ inte densamma för olika personer, utan varierar som en stokastisk variabel som är $\Gamma(2, 0.1)$. Låt nu X vara antalet röda blodkroppar från en på måfå uttagen person. Beräkna $E(X)$ och $P(X = k)$.
7. De stokastiska variablerna X och Y har den simultana tätheten

$$f(x, y) = \begin{cases} c(x + y) & \text{om } 0 < x < y < 1 \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Beräkna c , $E(X)$ och $E(X \mid Y = y)$.

8. $N, X_1, X_2, \dots$ är oberoende Poissonfördelade med $E(N) = 1$ och $E(X_i) = 2$. Beräkna $P(\sum_{i=1}^N X_i = 0)$.

Svar. 1a: $\frac{7}{15}$. **1b:** $\frac{3}{7}$. **2:** $\frac{1}{2}$. **3.** $f_{Y|X=x}(y) = \begin{cases} e^{x-y} & \text{om } y > x \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$

4a: $\text{Bin}(z, \frac{\lambda}{\lambda+\mu})$. **4b:** $\frac{z\lambda}{\lambda+\mu}$. **4c:** $\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda+\mu}}$. **5:** $\frac{\mu}{\theta}(1 - e^{-\theta/\mu})$. **6:** $\frac{100(k+1)}{11^{k+2}}$.

7: $c = 2$, $E(X) = \frac{5}{12}$, $E(X \mid Y = y) = \frac{5}{9}y$. **8:** $e^{e^{-2}-1}$.

Kapitel 3 (Transforms)

Sannolikhetsgenererande funktioner

1. Bestäm sannolikhetsgenererande funktionen till den geometriska $\text{Ge}(p)$ -fördelningen.
2. Beräkna $E(X(X-1)\cdots(X-k+1))$ där $X \in \text{Ge}(p)$.
3. En person planterar 10 plantor vilka var och en gror med sannolikheten $1/5$, oberoende av varandra. En planta som gror bär ett slumpmässigt antal bär, X , vilket är oberoende av antalet bär på de andra plantorna. Variabeln X har fördelningen $P(X=k) = (1/2)^{k+1}$, $k \geq 0$. Beräkna sannolikheten för att totalskörden blir minst 2 frukter.
4. De oberoende stokastiska variablerna $N, X_1, X_2, \dots$ är icke-negativa och heltalsvärda. N har sannolikhetsgenererande funktionen $g(\cdot)$ och $P(X_i=0) = p$ för $i = 1, 2, \dots$.
Bestäm $P(\sum_{i=1}^N X_i = 0)$ uttryckt i g och p .
5. Låt p vara sannolikheten att ett häftstift blir liggande med spetsen nedåt då man kastar det. En person kastar ett häftstift ett antal gånger, tills han för första gången får spetsen nedåt. Låt X vara numret på det kast då detta inträffar. Därefter kastar personen häftstiftet ytterligare X gånger. Låt Y vara antalet gånger som spetsen kommer nedåt i den senare kastserien. Bestäm fördelningen för Y
 - a. med hjälp av ett resonemang som stöder sig på betingning,
 - b. genom att först bestämma den sannolikhetsgenererande funktionen för Y
6. Bestäm sannolikhetsgenererande funktionen till den negativa binomialfördelningen $\text{NBin}(n, p)$.

Karakteristiska funktioner

7. Bestäm karakteristiska funktionen till
 - a. $U(a, b)$ -fördelningen.
 - b. $\Gamma(a, b)$ -fördelningen.
8. Låt X och Y vara oberoende stokastiska variabler $\in U(0, 1)$. Sätt $Z = X - Y$. Beräkna
 - a. karakteristiska funktionen till Z ,
 - b. sannolikhetstätheten för Z .

9. De stokastiska variablerna $X_1, X_2, \dots$ är oberoende och antar värdena $-1, 0, 1$ med sannolikheter $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ respektive. Vi inför den stokastiska variabeln $N = \min n$ sådant att $X_n = 0$.
- Hur är N fördelad?
 - Härled karakteristiska funktionen till $S_N = \sum_{j=1}^N X_j$.
10. Beräkna karakteristiska funktionen till den fördelning vars täthetsfunktion är $\frac{1}{2}e^{-|x|}$, $-\infty < x < \infty$, dvs. $L(1)$ -fördelningen.
11. Låt $X_1, \dots, X_n$ vara oberoende stokastiska variabler där X_i är $\Gamma(a_i, b)$ -fördelad.
- Visa att $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ är $\Gamma(\sum_{i=1}^n a_i, b)$ -fördelad.
 - Använd resultatet i (a) för att visa att summan av n oberoende $\text{Exp}(m)$ -variabler är $\Gamma(n, 1/m)$ -fördelad.
 - Visa med hjälp av (a) att en summa av kvadrater av n oberoende $N(0, 1)$ -variabler är $\Gamma(n/2, 1/2)$ -fördelad. Vad kallas denna fördelning?

Förgreningsprocesser

12. $X_0, X_1, \dots$ är en förgreningsprocess med förgreningsfördelning $\mathcal{L}(Y)$ med som har sannolikhetsgenererande funktionen $g(s)$. Det gäller att $X_0 = 1$.
- Låt $g_n(s)$ vara den sannolikhetsgenererande funktionen till X_n . Visa att $g_{n+1}(s) = g_n(g(s))$.
 - Låt $E(Y) = m$. Visa att $E(X_n) = m^n$.
13. Betrakta en förgreningsprocess med $g(s)$ som genererande funktion till antalet avkomor till en individ. Låt $h_n(s)$ beteckna genererande funktionen till totala antalet individer i processen t.o.m. generation n .
Visa det rekursiva sambandet $h_n(s) = sg(h_{n-1}(s))$.
14. En förgreningsprocess har avkommefördelningen $(\frac{1}{2})^{k+1}$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Låt X_n vara antalet individer i n :te generationen; $X_0 \equiv 1$. Beräkna
- $E(s^{X_1} t^{X_2})$ för $-2 < s, t < 2$.
 - $E(X_1 X_2)$.

Svar. 1: $\frac{p}{1-(1-p)t}$ **2:** $k! (\frac{1}{p} - 1)^k$ **3:** $1 - 1.4 \cdot 0.9^9$ **4:** $g(p)$.

5: $P(Y = k) = \frac{(1-p)^{k-1}}{(2-p)^{k+1}}$ om $k \geq 1$; $P(Y = 0) = \frac{1-p}{2-p}$. **6:** $p^n (1 - t(1-p))^{-n}$.

7a: $\frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$. **7b:** $(1 - bit)^{-a}$. **8a:** $2 \frac{1 - \cos t}{t^2}$.

8b: $f_Z(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{för } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{för övrigt.} \end{cases}$

9a: $P(N = n) = (\frac{1}{2})^n$, för $n = 1, 2, 3, \dots$ **9b:** $E(e^{itS_N}) = \frac{1}{2 - \cos t}$.

10: $\frac{1}{1+t^2}$. **11:** χ^2 -fördelningen. **14a:** $\frac{2-t}{4-2t-s}$ för $-2 < s, t < 2$. **14b:** 3.

Kapitel 5 (The Multivariate Normal Distribution)

1. X_1, X_2, X_3 är oberoende och $N(1, 1)$. Beräkna $P(X_1 + 2X_2 + 3X_3 > 9 \mid 2X_1 - X_2 + X_3 = 3)$.
2. Låt Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 vara oberoende och $N(0, 1)$. Sätt

$$X_1 = Z_1 + Z_2$$

$$X_2 = Z_2 + Z_3$$

$$X_3 = Z_3 + Z_4$$

Bestäm fördelningen för (X_1, X_2, X_3) . Vilka par av X -variabler är beroende resp. oberoende?

3. Låt $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ vara $N_2\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}\right)$. Bestäm fördelningen för $Y = X_1 - X_2$.
4. Fördelningen för längderna i cm av fäder och deras söner (mätta vid 21 års ålder) beskrivs rätt väl av en tvådimensionell normalfördelning:

$$N_2\left(\begin{pmatrix} 178 \\ 178 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 64 & 32 \\ 32 & 64 \end{pmatrix}\right)$$

- a. Bestäm marginalfördelningarna för fädernas (X_1) respektive sönerns (X_2) längder.
 - b. Bestäm betingade väntevärdet av en sons längd (X_2) givet att fadern har längd x_1 . Åskådliggör i ett koordinatsystem.
 - c. Bestäm sannolikheten för att en 186 cm lång fader får en son som vid 21 års ålder är längre än 182 cm.
5. (X_1, X_2, X_3) är $N_3(\mathbf{m}, \mathbf{C})$ där $\mathbf{m} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
 - a. Bestäm fördelningen för X_1 , för X_2 , för X_3 , för (X_1, X_2) , samt för (X_1, X_3) .
 - b. Bestäm fördelningen för X_2 givet $X_1 = 0.5$ samt beräkna $P(X_2 \leq 1 \mid X_1 = 0.5)$.

Svar. 1: $1 - \Phi(\frac{1}{\sqrt{2}})$.

2: $N_3\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right)$, X_1 och X_2 är beroende, X_2 och X_3 är beroende, men X_1 och X_3 är oberoende.

3: $Y \in N(0, 2 - 2\rho)$. **4a:** $N(178, 64)$ för båda. **4b:** $E(X_2 \mid X_1 = x_1) = 89 + 0.5x_1$. **4c:** 0.5. **5a:** $X_1 \in N(0, 2)$, $x_2 \in N(1, 2)$, $X_3 \in N(2, 3)$,

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \in N_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right), \begin{pmatrix} X_1 \\ X_3 \end{pmatrix} \in N_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\right).$$

5b: $X_2 \mid X_1 = 0.5 \in N(1.25, 1.5)$, $P = \Phi(-\frac{1}{\sqrt{24}}) \approx 0.42$.

Kapitel 6 (Convergence)

1. De stokastiska variablerna $X_1, X_2, \dots$ är oberoende och har alla tätheten $f(x) = \begin{cases} 1/(2x^2) & \text{för } |x| > 1 \\ 0 & \text{för } |x| \leq 1 \end{cases}$. Sätt $S_n = \sum_1^n X_k$.
- a. Visa att karakteristiska funktionen till S_n kan skrivas

$$\left(1 - \int_1^\infty \frac{1 - \cos(tx)}{x^2} dx\right)^n$$

- b. Visa att $2S_n/(\pi n)$ konvergerar i fördelning då $n \rightarrow \infty$ och ange gränsfördelningen. Det är bra att känna till att $\int_0^\infty \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$.
2. Låt $Y_1, Y_2, \dots$ vara oberoende stokastiska variabler som antar värdena -1 och 1 vardera med sannolikheten $\frac{1}{2}$. Bilda följden $X_n = \sum_1^n Y_k 2^{-k}$.
- a. Visa att $\varphi_n(t) = \frac{\sin t}{2^n \sin(2^{-n} t)}$ är karakteristisk funktion till X_n .
- b. Visa att X_n konvergerar i fördelning mot en stokastisk variabel X då $n \rightarrow \infty$.
- c. Hur är X fördelad?
3. Låt $X_n \in \Gamma(n, 1)$. Visa att

$$Y_n = \frac{X_n - n}{\sqrt{X_n}} \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

4. Låt $X_1, X_2, \dots$ vara en följd av oberoende $\text{Exp}(1)$ -fördelade stokastiska variabler. Betrakta $Y_n = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$. Visa att $Y_n - \log n \xrightarrow{d} Z$, där Z har fördelningsfunktionen $F_Z(x) = \exp(-e^{-x})$.
5. De stokastiska variablerna $X_1, X_2, \dots$ är oberoende och antar värdena $+1$ eller -1 med sannolikheterna $\frac{1}{2}$ respektive $\frac{1}{2}$. Sätt

$$Y_n = \sum_{k=1}^n \frac{X_k}{\sqrt{k}} \quad \text{för } n = 1, 2, \dots$$

Visa att då $n \rightarrow \infty$ gäller

- a. $\text{Var}(Y_n)/\ln n \rightarrow 1$,
Det är bra att känna till att $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \rightarrow \gamma = 0.577\dots = \text{Eulers konstant}$ då $n \rightarrow \infty$.
- b. $\frac{Y_n - \text{E}(Y_n)}{\sqrt{\ln n}} \xrightarrow{d} N(0, 1)$.

Svar. 1b: $C(0, 1)$. **2c:** $U(-1, 1)$.

Kapitel 7 (The Poisson Process)

1. Låt $X(t)$ vara en Poissonprocess med intensiteten λ . Låt T vara tiden för första händelsen. Bestäm för alla $t \in (0, 1)$ sannolikheten $P(T \leq t \mid X(1) = 1)$. Dvs. vad har variabeln $T \mid X(1) = 1$ för fördelning?
2. Låt $X(t)$ vara en Poissonprocess med intensitet λ . Bestäm $P(X(3) = 2 \mid X(1) = 0, X(5) = 4)$.
3. Låt $\{X(t), t \geq 0\}$ vara en Poissonprocess med intensiteten 2. Händelserna i processen registreras av en räknare som fungerar ofullständigt genom att den endast registrerar den första och sedan varannan händelse. Låt $Y(t)$ vara antalet händelser som registreras i intervallet $(0, t]$.
 - a. Bestäm $P(Y(2) = k)$ för $k = 0, 1, 2, 3$.
 - b. Är $\{Y(t), t \geq 0\}$ en Poissonprocess?
4. Visa att för en Poissonprocess med intensitet c gäller för varje $\epsilon > 0$ att $P(|X(t)/t - c| > \epsilon) \rightarrow 0$ då $t \rightarrow \infty$, dvs. att $X(t)/t \xrightarrow{P} c$.
5. Radioaktiva sönderfall sker enligt en Poissonprocess med intensiteten λ . De enskilda sönderfallen registreras med sannolikheten p (och undgår att registreras med sannolikheten $1 - p$) oberoende av varandra. Visa att $Y(t) = \{\text{antalet registrerade sönderfall under tiden } (0, t]\}$ är en Poissonprocess med intensiteten λp .
6. Vad är sannolikheten att endera av två oberoende $\text{Po}(\lambda)$ -processer hinner nå nivå 2 innan den andra når nivå 1.

Svar. 1: $t, U(0, 1)$. 2: $\frac{3}{8}$. 3a: $e^{-4}, 12e^{-4}, \frac{64}{3}e^{-4}, \frac{128}{9}e^{-4}$. 3b: Nej. 6: $\frac{1}{2}$.