**Alternativ beräkning av väntevärde**

Följande sats ger en alternativ formel för att beräkna väntevärde av en stokastisk variabel $X$.

**Sats:** Låt $F$ vara fördelningsfunktionen till en stokastisk variabel $X$. Då är

$$E(X) = -\int_{-\infty}^{0} F(x)dx + \int_{0}^{\infty} (1 - F(x))dx$$

Likheten skall tolkas som att om det ena ledet existerar, existerar det andra och är lika.
**Bevis.** Satsen gäller alltid, oavsett om $X$ är diskret eller kontinuerlig eller ingetdera (t.ex. blandning av diskret och kontinuerlig stokastisk variabel). Vi visar satsen enbart för fallet kontinuerlig stokastisk variabel.

Vi har att

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{0} xf(x)dx + \int_{0}^{\infty} xf(x)dx$$

där $f$ är täthetsfunktionen. Vi betraktar den sista integralen och integrerar partiellt. Låt $A$ vara positivt (vi låter sedan $A$ gå mot $\infty$).

$$\int_{0}^{A} xf(x)dx = [-x(1 - F(x)]_0^A + \int_{0}^{A} (1 - F(x))dx = -A(1 - F(A)) + \int_{0}^{A} (1 - F(x))dx$$

Om väntevärdet existerar gäller att $0 \leq A(1 - F(A)) = A\int_A^\infty f(x)dx \leq \int_A^\infty xf(x)dx \to 0$ då $A \to \infty$. Om å andra sidan $\int_0^\infty (1 - F(x))dx$ är konvergent är visar likheten ovan att också $\int_0^\infty xf(x)dx$ är konvergent eftersom vänsterledet ovan är växande i $A$ och mindre än eller lika med $\int_0^\infty (1 - F(x))dx$. Låt därför $A \to \infty$ och vi erhåller

$$\int_{0}^{\infty} xf(x)dx = \int_{0}^{\infty} (1 - F(x))dx$$

Integralen över negativa $x$-axeln behandlas på liknande sätt. Detta visar satsen.

Om $X$ är en heltalsvariabel är $F(x)$ konstant mellan heltalen och man erhåller i detta fall att

$$E(X) = -\sum_{k=-\infty}^{-1} F(k) + \sum_{i=0}^{\infty} (1 - F(k))$$

Om $X$ är en icke-negativ stokastisk variabel försvinner naturligtvis den första integralen respektive summan i formlerna ovan.

Vi tillämpar detta på ett yatzy-exempel. Låt $Y$ vara antalet kastomgångar med från början 5 tärningar, tills alla visar sexa. En kastomgång görs med de tärningar som dittills inte visat sexa. Om vi låter $X_i$ vara antalet kastomgångar med tärning nummer $i$. Man inser att
$Y = \max(X_i; i = 1, 2, 3, 4, 5)$ där vi antar $X_i$:na oberoende. Härav fås att

$$F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(X_1 \leq x, X_2 \leq x, X_3 \leq x, X_4 \leq x, X_5 \leq x, X_6 \leq x) =$$
$$\Pi_{i=1}^5 (P(X_i \leq x) = (1 - P(X > x))^5$$

där $X$ är antalet kast med tärning tills den visar sexa. Men $P(X > k)$ är händelsen att de $k$ första kasten visar icke-sexa varför $P(X > k) = (5/6)^k$. Härav fås att

$$F_Y(k) = (1-(5/6)^k)^5 = (\text{binomialsatsen}) = 1-\binom{5}{1}(\frac{5}{6})^k+\binom{5}{2}(\frac{5}{6})^{2k}-\binom{5}{3}(\frac{5}{6})^{3k}+\binom{5}{4}(\frac{5}{6})^{4k}-(\frac{5}{6})^{5k}$$

Utnyttja nu att $\sum_{k=0}^{\infty} x^{mk} = \sum_{k=0}^{\infty}(x^m)^k = (\text{geometrisk serie med kvot } x^m) = \frac{1}{1-x^m}$ och man erhåller efter en del råräknande att

$$\begin{aligned} E(Y) = &\sum_{k=0}^{\infty}(1 - F_X(k)) = \sum_{k=0}^{\infty}(\binom{5}{1}(\frac{5}{6})^k - \binom{5}{2}(\frac{5}{6})^{2k} + \binom{5}{3}(\frac{5}{6})^{3k} - \binom{5}{4}(\frac{5}{6})^{4k} + (\frac{5}{6})^{5k}) \\ =&\frac{3698650986}{283994711} \approx 13.0237 \end{aligned}$$