BERÄKNING AV KONFIDENSINTERVALL MED HJÄLP AV FORMELSAMLINGEN (version från 2005)

Ett stickprov på N(μ, σ), konfidensintervall för μ.

1) σ känt.
Kombinera FS 11.1 a) och FS 12.1 (FS=formelsamling). Låt θ vara μ, θ^* vara $\bar{X}$ (den naturliga skattningen av μ) och låt D vara $\sigma/\sqrt{n}$. FS 11.1 a) ger att $\bar{X}$ är $N(\mu, \sigma/\sqrt{n})$ och av detta fås genom identifieringen ovan att

$$\bar{x} \pm \lambda_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}$$

är ett konfidensintervall för μ med konfidensgrad $1-\alpha$.

2) σ okänt.
Kombinera FS 11.1 d) och FS 12.2. Låt θ vara μ, θ^* vara $\bar{X}$ (den naturliga skattningen av μ) och låt d vara $s/\sqrt{n}$, där s är stickprovsstandardavvikelsen och slutligen $f = n-1$. Enligt FS 11.1 d) är $\frac{\bar{X}-\mu}{s/\sqrt{n}}$ t-fördelad $t(n-1)$. FS 12.2 ger att

$$\bar{x} \pm t_{\alpha/2}(n-1)s/\sqrt{n}$$

är ett konfidensintervall för μ med konfidensgrad $1-\alpha$.

Två oberoende stickprov, konfidensintervall för $\mu_1 - \mu_2$.
$x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}$ och $y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}$ från $N(\mu_1, \sigma_1)$ respektive $N(\mu_2, \sigma_2)$.

1) σ_1 och σ_2 kända.
Kombinera FS 11.3 och FS 12.1. Låt θ vara $\mu_1 - \mu_2$, θ^* vara $\bar{X} - \bar{Y}$ (den naturliga skattningen av $\mu_1 - \mu_2$) och låt D vara $\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$. FS 11.3 ger att $\bar{X} - \bar{Y}$ är $N(\mu_1 - \mu_2, \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}})$ och av detta fås då genom FS 11.1 att

$$\bar{x} - \bar{y} \pm \lambda_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

är ett konfidensintervall för $\mu_1 - \mu_2$ med konfidensgrad $1-\alpha$.

2) σ_1 och σ_2 okända men lika (=σ).
Kombinera FS 11.2 d) och FS 12.2. Låt θ vara $\mu_1 - \mu_2$, θ^* vara $\bar{X} - \bar{Y}$ (den naturliga skattningen av $\mu_1 - \mu_2$) och låt d vara $s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$, där s^2 är den poolade stickprovsvariansen enligt FS 11.2.b). FS 11.2 d) ger att $\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{s\sqrt{1/n_1+1/n_2}}$ är $t(n_1 + n_2 - 2)$ och av detta fås genom FS 11.2 att

$$\bar{x} - \bar{y} \pm t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

är ett konfidensintervall för $\mu_1 - \mu_2$ med konfidensgrad $1-\alpha$.

3) Allmän linjärkombination.
Antag allmännare att vi vill ha ett konfidensintervall för en linjärkombination $a\mu_1 + b\mu_2$ där a och b är givna tal. Den naturliga skattningen av $a\mu_1 + b\mu_2$ är $a\bar{X} + b\bar{Y}$. Variansen för denna stokastiska variabel är

$$a^2 \frac{\sigma_1^2}{n_1} + b^2 \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

och således är $a\bar{X} + b\bar{Y}$ N($a\mu_1 + b\mu_2, \sqrt{a^2 \frac{\sigma_1^2}{n_1} + b^2 \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$) (följer t.ex. av FS 4 och FS 11.1)
Sätt $\theta^* = a\bar{X} + b\bar{Y}$, $\theta = a\mu_1 + b\mu_2$ och $D = \sqrt{a^2 \frac{\sigma_1^2}{n_1} + b^2 \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$. Från FS 12.1 fås att

$$a\bar{x} + b\bar{y} \pm \lambda_{\alpha/2} \sqrt{a^2 \frac{\sigma_1^2}{n_1} + b^2 \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

är ett konfidensintervall för $a\mu_1 + b\mu_2$ med konfidensgrad $1 - \alpha$.
Om σ_1 och σ_2 är okända men lika, skatta den okända variansen med en poolad varians, se FS 11.2 b). Ersätt σ_1^2 och σ_2^2 med den poolade stickprovsvariansen s^2 och λ-kvantilen med en t-kvantil med lämpligt antal frihetsgrader, se återigen FS 11.2 b). Metoden kan generaliseras till fler än två stickprov.

Konfidensintervall för σ^2.
Ett stickprov från N(μ, σ^2).
Kombinera FS 11.1 b) med FS 12.4. I FS 12.4 låt $f = n - 1$, $\theta^* = s^2$ och $\theta^2 = \sigma^2$. FS 11.1 b) ger då att $f\frac{\theta^{*2}}{\theta^2}$ är $\chi^2(n-1)$ och FS 12.4 att

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$$

är ett konfidensintervall för σ^2 med konfidensgrad $1 - \alpha$.