

Bilen och getterna

För något år sedan diskuterades följande problem i en del tidskrifter (t ex Ny Teknik):

Vid en TV-tävling fick den tävlande chansen att vinna en bil om han/hon pekade på den rätta dörren av tre. Bakom var och en av de två andra dörrarna stod en get. Den tävlande gjorde sitt val, men tävlingsledaren öppnade inte den valda dörren utan en av de två andra och bakom den stod en get. Han erbjöd den tävlande att byta dörr. Frågan är om personen kan öka sannolikheten att vinna bilen genom att byta dörr.

Förslag till lösning:

Inför händelsen

A = 'Den tävlande pekar på en vinstdörr' och

B = 'programledaren öppnar en getdörr'.

Vi inser att $P(A) = 1/3$ och vidare får vi med Bayes' sats

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|A^*)P(A^*)} = \frac{\frac{1}{3}P(B|A)}{\frac{1}{3}P(B|A) + \frac{2}{3}P(B|A^*)}$$

där vi utnyttjat att $P(A^*) = 1 - P(A) = 2/3$.

Vi har nu ett antal "renodlade" tolkningar av förutsättningarna

a) Den "naiva" tolkningen av problemformulering innebär att $P(B|A) = 1$ och $P(B|A^*) = 1$, dvs att programledaren alltid öppnar en "getdörr". Man får då $P(A|B) = \frac{1}{3}$ och alltså skall man byta eftersom $P(A^*|B) = 1 - P(A|B) = \frac{2}{3}$.

b) En "elak" programledare skulle vara en som bara erbjuder den tävlande bytet om han/hon har valt vinstdörren. Alltså har vi $P(B|A) = 1$ och $P(B|A^*) = 0$ och alltså får vi $P(A|B) = 1$ och slutsatsen är att man inte skall byta.

c) En "snäll" programledare skulle å andra sidan vara en som bara erbjuder bytet om den tävlande har valt en getdörr. Alltså har vi $P(B|A) = 0$ och $P(B|A^*) = 1$ som ger $P(A|B) = 0$ och slutsatsen är att man skall byta!

d) En berusad programledare skulle slumpmässigt öppna en av de kvarvarande dörrarna oavsett om där finns en bil eller en get. I detta fall är alltså $P(B|A) = 1$ (ty han har bara getdörrar att välja på) och $P(B|A^*) = 1/2$ (ty han har en getdörr och en vinstdörr att välja på). Detta ger $P(A|B) = \frac{1}{2}$.

Notera hur en analys med hjälp av Bayes' sats på ett kristallklart sätt indikerar vilken betydelse programledarens strategi har.