Ett exempel på att $\bar{x}$ ej är effektivaste skattningen

Låt våra data $x_1, x_2, \cdots, x_n$ vara utfall av $X_1, X_2, \cdots, X_n$ som är oberoende likafördelade där X_j är $R(0, 2\theta)$ för $j = 1, 2, \cdots, n$. Notera att $E(X_j) = \theta$.
Ett förslag på skattning skulle vara $\theta_1^*(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$. Detta är (enligt den allmänna satsen om $\bar{x}$ som skattning av väntevärdet) en väntevärdesriktig skattning av θ. Det är också, som lätt visas, minsta-kvadratskattningen av θ.
Vi har

$$V(\theta_1^*(X_1, X_2, \cdots, X_n)) = V(\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \frac{1}{n^2}(V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n)).$$

Vi får ur formelsamlingen att

$$V(X_j) = \frac{(2\theta)^2}{12} = \frac{\theta^2}{3}$$

som ger

$$V\left(\theta_1^*(X_1, X_2, \cdots, X_n)\right) = \frac{\theta^2}{3n}.$$

Om vi i stället tar förslaget $\theta_2^*(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \dfrac{1}{2}\max(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ så är denna skattning inte riktigt väntevärdesriktig, men om vi modifierar den till

$$\theta_3^*(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{n+1}{2n}\max(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

så visas nedan att denna är väntevärdesriktig.

Vi har ju att om $Y = \max(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ så har vi

$$F_Y(y) = P(X_1 \le y; X_2 \le y; \cdots; X_n \le y;) = P(X_1 \le y)P(X_2 \le y)\cdots P(X_n \le y) = \left(\frac{y}{2\theta}\right)^n$$

som ger $f_Y(y) = \dfrac{ny^{n-1}}{(2\theta)^n}$ då $0 \le y \le 2\theta$ (och 0 för övriga y). Detta ger

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)dy = \int_0^{2\theta} y\frac{ny^{n-1}}{(2\theta)^n}dy = (y/2\theta = u) = n\int_0^1 2\theta u^n du = \theta\frac{2n}{n+1}$$

som visar att

$$\theta_3^*(X_1, X_2, \cdots, X_n) = \frac{n+1}{2n}\max(X_1, X_2, \cdots, X_n) = \frac{n+1}{2n}Y$$

är väntevärdesriktig ty $E(\theta_3^*) = \theta$.
För att beräkna $V(Y)$ tittar vi på

$$E\left(Y^2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_Y(y)dy = \int_0^{2\theta} y^2 n\frac{y^{n-1}}{(2\theta)^n}dy = (2\theta)^2 n\int_0^1 u^{n+1}du = (2\theta)^2\frac{n}{n+2}$$

som ger

$$V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = 4\theta^2\frac{n}{n+2} - \left(\theta\frac{2n}{n+1}\right)^2 = 4\theta^2\frac{n}{(n+2)(n+1)^2}.$$

Detta ger nu

$$V(\theta_3^*) = V\left(\frac{n+1}{2n}Y\right) = \frac{(n+1)^2}{4n^2}V(Y) = \frac{(n+1)^2}{4n^2}4\theta^2\frac{n}{(n+2)(n+1)^2} = \frac{\theta^2}{n(n+2)}$$

och detta skall alltså jämföras med $V(\theta_1^*) = \dfrac{\theta^2}{3n}$ enligt ovan. Man ser att $V(\theta_3^*) < V(\theta_1^*)$ utom i de (uraratade) fall då $n = 1$ och/eller $\theta = 0$ då likhet råder.

Man kan se att skattningen $\theta_1^* = \bar{x}$ kan ge orimliga resultat. Antag att man erhållit observationerna 0.1, 0.2 och 0.9. Medelvärdet är 0.4 och skattningen av 2θ blir 0.8, d.v.s den skattade fördelningen är $R(0, 0.8)$. Men en av observationerna tillhör inte detta intervall! Det visar att medelvärdet är en olämplig skattning av θ.

Variansen $V(\theta^*) = E[(\theta^* - \theta)^2]$ om θ^* är en väntevärdesriktig skattning av θ. Det innebär att variansen är den förväntade kvadratavvikelsen från θ, och denna vill man minimera. Nu kan man argumentera för att θ^* är den bästa skattningen för θ om den förväntade kvadratavvikelsen från θ är så liten som möjligt, oavsett om skattningen är väntevärdesriktig eller ej.

Om vi utgår från Y ovan skulle vi kunna söka ett a sådant att $E[(aY - \theta)^2]$ minimeras. Om vi utvecklar kvadraten och utnyttjar uttrycken för $E(Y)$ och $E(Y^2)$ ovan finner man att kvadratavvikelsen minimeras för $a = \dfrac{n+2}{2(n+1)}$, d.v.s. skattningen

$$\theta_4^* = \frac{n+2}{2(n+1)}\max(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

har en mindre medelkvadratavvikelse från θ än de övriga skattningarna ovan. Skattningen θ_4^* är dock inte väntevärdesriktig.