Ett exempel på att summor av normalfördelade variabler

ej behöver vara normalfördelade trots att de är okorrelerade

Vi vet att linjärkombinationer av flerdimensionellt normalfördelade variabler är normalfördelade. Här är ett exempel på att det är viktigt att man verkligen har en flerdimensionell normalfördelning i botten.

Låt X vara $N(0,1)$ samt låt vidare U ha fördelningen $P(U=1)=P(U=-1)=1/2$ samt vara oberoende av X.

Vi låter nu $Y=U\cdot|X|$ vilket alltså betyder att "vi tar bort tecknet på X" och sen (oberoende) lottar om ett nytt tecken.

Man ser lätt att Y också är $N(0,1)$ beroende på symmetrin i $N(0,1)$-fördelningen. Alltså är både X och Y normalfördelade men däremot är ej $X+Y$ normalfördelad. T ex är P(X+Y=0)=1/2 ty $\{X+Y=0\}=\{U=-X/|X|\}$.

Detta trots att faktiskt X och Y är okorrelerade. Detta inses genom följande kalkyl:

$$C(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=E(U\cdot X\cdot|X|)-0\cdot 0=E(U)E(X\cdot|X|)=0\cdot E(X\cdot|X|)=0$$

där vi utnyttjat att U är oberoende av X (och därigenom också av $X|X|$).

I verkligheten har $X+Y$ en s k blandad fördelning (Kapitel 3.9 i Blom). Man förstår av ovanstående att (X,Y) ej kan vara två-dimensionellt normalfördelad. Fördelningen för (X,Y) ligger helt koncentrerad på ett kors i R^2, medan alla två-dimensionella normalfördelningar har massa i hela xy-planet (om de ej är urartade - då de har massan på en linje).